Não, Não e Não: as negações e suas lógicas

Kherian Gracher[49]

Resumo

Quais são as características das chamadas negações "clássica", "paraconsistente" e "paracompleta"? Podemos as relacionar? Quais suas propriedades sintáticas? Como se comportam semanticamente? Neste trabalho tentaremos abordar, brevemente, essas discussões. Com um caráter introdutório, fixaremos e percorreremos alguns aspectos notáveis das Lógicas Clássica, Paraconsistente e Paracompleta, mantendo nossa atenção para as negações que levam o nome desses sistemas. Apresentaremos também um quarto sistema, pouco conhecido no meio especializado, chamado de "Cálculo Não-Alético", cuja característica importante é introduzir apenas *um* conectivo de negação (que chamaremos de "negação não-alética") que é capaz de se comportar como a negação clássica, paraconsistente ou paracompleta. Ao fim, apresentaremos um problema acerca da possibilidade de relacionarmos (formalmente) esses conectivos, como se espera fazer com o Cálculo Não-Alético – e como é usualmente feito, ainda que informalmente, na literatura filosófica.

Palavras-chave: Negações; Lógica Clássica; Lógicas Não-Clássicas; Filosofia da Lógica.

[49]Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, Brasil. email: kherian@gmail.com

No, No and No: the negations and their logicsa

Abstract

What are the characteristics of the so-called "classic", "paraconsistent" and "paracomplete" negations? Can we relate them? What are its syntactic properties? How do they behave semantically? In this paper, we will try to briefly address these discussions. With an introductory character, we will establish and cover some notable aspects of Classical, Paraconsistent and Paracomplete Logics, keeping our attention to the negations that bear the name of these systems. We will also present a fourth system, little known in the specialized field, called "Non-Alethic Calculus", whose important characteristic is to introduce only *one* connective of negation (which we will call "non-alethic negation") that is capable of behaves like classic, paraconsistent or paracomplete negation. In the end, we will present a problem with the possibility of relating these connectors (formally), as is expected to do with Non-Alethic Calculus - and how it is usually done, albeit informally, in the philosophical literature.

Keywords: Negations; Classical Logic; Non-Classical Logics; Philosophy of Logic.

5.1. Introdução

Ao longo do trabalho discorreremos principalmente sobre quatro *tipos* de negações diferentes que, de modo geral, foram tratadas de modo sistemático por quatro sistemas lógicos distintos, sendo elas: Lógica Clássica; Lógica Paraconsistente; Lógica Paracompleta; e Lógica Não-Alética.[50] Dentre esses quatro sistemas, apenas o último é (*parcialmente*) desconhecido do público especializado. Na maior parte dos casos, a Lógica Clássica é conhecida e apresentada (ainda que de diferentes modos) nos mais variados manuais de lógica.[51] Como podemos averiguar nesses manuais, há uma multiplicidade de sistemas que são ditos "clássicos". Concentraremos nossa análise no sistema chamado "Lógica Proposicional Clássica" ($\mathcal{LPC}$). A Lógica Paraconsistente, por outro lado, teve um grande desenvolvimento em meados do século XX, principalmente nos trabalhos do lógico e filósofo polonês Jaskowski (1948), do russo Vasiliev (1925) e, em seu ápice, nos trabalhos do lógico e filósofo brasileiro da Costa (1963) e do lógico e filósofo inglês Priest (1979). Dada a pluralidade de sistemas paraconsistentes, trataremos do sistema de da Costa (1963), chamado "Cálculo Proposicional Paraconsistente" ($\mathscr{C}_1$).[52] Quanto à Lógica Paracompleta, os primeiros sistemas for-

[50] Restringiremos nossa análise aos sistemas *proposicionais* de cada uma das lógicas mencionadas.

[51] Alguns dos exemplos mais conhecidos são Mendelson (1997); Kleene (2002); Church (1996); Shoenfield (1967).

[52] Note que da Costa (1963) não construiu apenas *um* Cálculo Proposicional Paraconsistente, mas sim uma hierarquia de Cálculos Proposicionais Paraconsistentes, $\mathscr{C}_n$ $(0 \leq n \leq \omega)$, tal que $\mathscr{C}_0$ é o

mais remontam à filosofia intuicionista, com trabalhos de Brouwer (1907, 1908), Kolmogorov (1925), Heyting (1956) entre outros. No entanto, vale notar que a chamada "Lógica Intuicionista", ainda que possa ser tratada como uma *Lógica Paracompleta* (que explicaremos à frente), é associada uma teoria filosófica peculiar que não é encontrada em outras lógicas que podem ser ditas *paracompletas*. Portanto, como veremos, focaremos nossa análise no sistema lógico paracompleto desenvolvido por Loparić e da Costa (1984) e da Costa e Marconi (1986), chamado de "Cálculo Proposicional Paracompleto" ($\mathscr{P}_1$).[53] Por último, mas não menos importante, trataremos de um outro trabalho também desenvolvido por da Costa (1989), que é o sistema lógico chamado de "Cálculo Proposicional Não-Alético" ($\mathbb{N}_1$).[54]

5.2. Lógica Clássica

O que é a chamada "Lógica Clássica"? Há diversas lógicas que podem recair sobre essa nomenclatura, como o cálculo proposicional clássico, a lógica elementar (cálculo clássico de predicados de primeira-ordem) e, se envolvermos também a chamada "grande lógica" (que contém alguma matemática), teríamos também os cálculos, as lógicas de ordem superior e até mesmo as teorias usuais de conjuntos.[55] A construção e o desenvolvimento da chamada "Lógica Clássica" remonta à antiguidade, nos trabalhos de filósofos e matemáticos gregos.[56] Não faremos aqui uma reconstrução histórica e, tampouco, pretendemos oferecer todas as condições necessárias e suficientes para definirmos o que permite uma lógica recair sobre a nomenclatura "clássica". Precisamos, todavia, tecer algumas considerações importantes sobre características comuns desses sistemas. Restringiremos nossa análise para as lógicas *proposicionais*, de modo que trataremos especificamente da *Lógica*

Cálculo Proposicional Clássico (da Costa et al., 2007, p. 804,807) e, para todo cálculo $\mathscr{C}_{n>0}$, $\mathscr{C}_n$ é um Cálculo Proposicional Paraconsistente. Por questão de facilidade, trabalharemos inicialmente apenas com o cálculo $\mathscr{C}_1$.

[53] De modo semelhante à hierarquia $\mathscr{C}_n$ $(0 \leq n \leq \omega)$, Loparić e da Costa (1984) não construiu apenas *um* Cálculo Proposicional Paracompleto, mas sim uma hierarquia de Cálculos Proposicionais Paracompletos, $\mathscr{P}_n$ $(0 \leq n \leq \omega)$, tal que $\mathscr{P}_0$ é o Cálculo Proposicional Clássico (da Costa e Marconi, 1986, p. 505) e, para todo cálculo $\mathscr{P}_{n>0}$, $\mathscr{P}_n$ é um Cálculo Proposicional Paracompleto. Por questão de facilidade, trabalharemos inicialmente apenas com o cálculo $\mathscr{P}_1$.

[54] Tal como nos cálculos anteriores, da Costa (1989) não desenvolveu apenas *um* Cálculo Proposicional Não-Alético, mas sim uma hierarquia de Cálculos Proposicionais Não-Aléticos, $\mathscr{N}_n$ $(0 \leq n \leq \omega)$, tal que $\mathbb{N}_0$ é o Cálculo Proposicional Clássico (da Costa, 1989, p. 30) e, para todo cálculo $\mathbb{N}_{n>0}$, $\mathbb{N}_n$ é um Cálculo Proposicional Não-Alético. Por questão de facilidade, trabalharemos inicialmente apenas com o cálculo $\mathbb{N}_1$.

[55] É questionável se podemos incluir teorias como *teorias de conjuntos*, *cálculos de ordem-superior* e até mesmo a matemática como parte do que chamamos de "Lógica Clássica". Portanto, utilizamos aqui a noção de "grande lógica" apenas como considerações didáticas, sem nos comprometermos com essa tese mais forte.

[56] *Cf.* Kneale e Kneale (1962).

Proposicional Clássica ($\mathcal{LPC}$).[57]

5.2.1. Escolha de Formalização

Ao desenvolvermos a $\mathcal{LPC}$ precisamos escolher um dos diversos modos pelos quais podemos formalizá-la. Quais serão os conectivos primitivos e quais (se haverá algum) serão os definidos? O sistema será *estilo-Hilbert*, *i.e.*, será uma formalização axiomática?[58] Quais serão os axiomas e quais serão as regras de inferência?[59] Ou não será axiomática, mas sim uma *dedução natural*, tal como proposta por Gentzen (1935)? Essas e outras perguntas precisariam de uma resposta cuidadosa, pois altera-se radicalmente o modo como faríamos a apresentação da Lógica Clássica. Em nosso caso, vamos nos ater a uma formalização axiomática da $\mathcal{LPC}$. Mas em qual? Por esse trabalho ter também um caráter introdutório, vejamos alguns exemplos de formalizações da $\mathcal{LPC}$.

Uma conhecida formalização é a de Kleene (1971, p.82), no qual são introduzidos como conectivos primitivos a conjunção, disjunção, condicional e negação, tomando apenas o *Modus Ponens* como regra de inferência e os seguintes axiomas:[60]

K1 $\alpha \to (\beta \to \alpha)$

K2 $(\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to ((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma))$

K3 $(\alpha \wedge \beta) \to \alpha$

K4 $(\alpha \wedge \beta) \to \beta$

K5 $\alpha \to (\beta \to (\alpha \wedge \beta))$

K6 $\alpha \to (\alpha \vee \beta)$

K7 $\beta \to (\alpha \vee \beta)$

K8 $(\alpha \to \gamma) \to ((\beta \to \gamma) \to ((\alpha \vee \beta) \to \gamma))$

K9 $(\alpha \to \beta) \to ((\alpha \to \neg\beta) \to \neg\alpha)$

[57] Doravante, quando nos referirmos à Lógica Clássica (a não ser que qualifiquemos), estamos tratando da $\mathcal{LPC}$. Utilizaremos também $\vdash_{lpc}$ e $\vDash_{lpc}$ para as noções de consequência sintática e semântica, respectivamente, de $\mathcal{LPC}$.

[58] *Cf.* Krause (2002).

[59] Um sistema axiomático deve conter ao menos uma regra de inferência; por outro lado, uma lógica pode ser composta apenas por regras de inferência, sem qualquer axioma. *Cf.* Carroll (1895).

[60] Utilizaremos o termo "axiomas" para nos designarmos, muitas vezes, ao chamados "esquemas de axiomas". Um axioma, de modo preciso, é uma fórmula de uma dada linguagem tomada como postulado. Uma vez que utilizaremos letras gregas minúsculas como *metavariáveis* para fórmulas, quando expressamos aquilo que chamamos de "axiomas" em termos dessas metavariáveis, o que obtemos são *esquema de axiomas*, cuja substituição uniforme das metavariáveis por fórmulas da linguagem resultam em instâncias do axioma em questão.

K10 $\neg\neg\alpha \rightarrow \alpha$

Mendelson (1997, p.35), de outro modo, assume apenas a condicional e a negação como conectivos primitivos, o *Modus Ponens* como regra e apenas os seguintes três axiomas para $\mathcal{LPC}$:

M1 $\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)$

M2 $(\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)) \rightarrow ((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma))$

M3 $(\neg\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow ((\neg\alpha \rightarrow \neg\beta) \rightarrow \alpha)$

Em uma abordagem mais econômica, Meredith (1953) introduz apenas a negação e condicional como conectivos primitivos, *Modus Ponens* como regra e, de modo espantoso, apenas *um* axioma:

Mer $[(((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\neg\gamma \rightarrow \neg\delta)) \rightarrow \gamma) \rightarrow \epsilon] \rightarrow [(\epsilon \rightarrow \alpha) \rightarrow (\delta \rightarrow \alpha)]$

Em um esforço de maior economia formal, Nicod (1917), utilizando-se apenas da barra de Sheffer como conectivo primitivo, uma forma de *Modus Ponens* como regra,[61] e apenas *um* axioma:

Nic $(\alpha \uparrow (\beta \uparrow \gamma)) \uparrow \{[\delta \uparrow (\delta \uparrow \delta)] \uparrow [(\epsilon \uparrow \beta) \uparrow ((\alpha \uparrow \epsilon) \uparrow (\alpha \uparrow \epsilon))]\}$

Além dessas versões, há dezenas de outras abordagens axiomáticas para a $\mathcal{LPC}$. Para nos fixarmos em apenas um conjunto de axiomas, tomaremos aqui a seguinte abordagem. Serão conectivos primitivos apenas a negação e a condicional, e os seguintes postulados:

Postulados 1 (Cálculo $\mathcal{LPC}$)**.**

MP $\alpha, \alpha \rightarrow \beta / \beta$

A1 $\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)$

A2 $(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow ((\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma))$

A3 $(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow ((\alpha \rightarrow \neg\beta) \rightarrow \neg\alpha)$

A4 $\neg\neg\alpha \rightarrow \alpha$

Podemos então definir a conjunção, disjunção e bicondicional tal como se segue:

Conjunção: $\alpha \wedge \beta \stackrel{\text{def}}{=} \neg(\alpha \rightarrow \neg\beta)$

Disjunção: $\alpha \vee \beta \stackrel{\text{def}}{=} \neg\alpha \rightarrow \beta$

Bicondicional: $\alpha \leftrightarrow \beta \stackrel{\text{def}}{=} (\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\beta \rightarrow \alpha)$

A partir dos postulados e das definições oferecidas, somos capazes da desenvolver a $\mathcal{LPC}$.

[61] Chamada de "Modus Ponens de Nicod", a regra é a seguinte: $\alpha, (\alpha \uparrow (\alpha \uparrow \beta)) / \beta$

5.2.2. Três Princípios Famosos da Lógica Clássica

Há algumas características (ou princípios) da Lógica Clássica que são considerados condições necessárias (ainda que não suficientes) para todo e qualquer lógica que recaia sobre a nomenclatura de "clássica". Por exemplo, a caracterização dos sistemas entendidos como *não-clássicos*, como nota Gomes e D'Ottaviano (2017, p.31), "[...] se deve, em parte, a como essas últimas facultam ou não validade aos princípios lógicos fundamentais do pensamento dedutivo clássico". Três princípios se tornaram famosos, cuja formulações mais comuns são:

(PI) Princípio da Identidade: $\alpha \rightarrow \alpha$

(PTE) Princípio do Terceiro Excluído: $\alpha \vee \neg\alpha$

(PNC) Princípio da Não-Contradição:[62] $\neg(\alpha \wedge \neg\alpha)$

Veremos à frente que nas lógicas paraconsistentes, o PNC não se aplica a todas as fórmulas de sua linguagem. De modo similar, nas lógicas paracompletas, o PTE tem um escopo reduzido, não abrangendo todas as fórmulas de sua linguagem. No entanto, como dito, esses princípios (ou formas equivalentes) devem ser satisfeitos em qualquer lógica caracterizada como clássica.

5.2.3. Consistência e Trivialidade

Seja na Lógica Clássica, seja nas teorias que a adotam como sua lógica subjacente (que chamaremos de "teorias clássicas"), as noções de *consistência* e *trivialidade* estão estritamente conectadas. Como bem sabido, se uma teoria é *consistente*, nem toda fórmula de sua linguagem é demonstrável (*i.e.*, a teoria não é trivial). Dito de outro modo, se uma teoria é trivial (e contém negação), então ela será inconsistente. Nas teorias clássicas, a demonstração de uma fórmula qualquer e sua negação acarreta *necessariamente* a sua trivialidade. Isto é, qualquer caso de contradição implicará na trivialidade do sistema. Portanto, para uma teoria ser dita "clássica", elas devem ser consistentes e não-triviais (com relação à sua negação), visto os princípios supracitados.[63]

5.2.4. Negação, *Ex Falso Sequitur Quodlibet* e Trivialização

Mas por que a existência de uma contradição em $\mathcal{LPC}$ implica em sua trivialização? De modo geral, isso ocorre pelo funcionamento da *negação clássica*.

[62] Também conhecido como *Princípio da Contradição* – terminologia comum na comunidade filosófica anglófona. Todavia, chamá-lo como "Princípio da *Não*-Contradição" parece empregar uma terminologia mais adequada com o sentido do princípio em questão. *Cf.* Gomes e D'Ottaviano (2017, p.31, Nota 4).

[63] Por precisão, salientamos que não é meramente a satisfação desses princípios que garantem a consistência e não-trivialidade, mas outras características importantes, como a noção de dedução empregada. *Cf.* Shoenfield (1967, Cap. 4).

Conforme vimos nos axiomas da lógica clássica (p. 69), introduzimos a negação através de dois axiomas:

A3 $(\alpha \to \beta) \to ((\alpha \to \neg\beta) \to \neg\alpha)$

A4 $\neg\neg\alpha \to \alpha$

O axioma A3 nos afirma que se uma fórmula acarreta uma contradição, isso implica na negação dessa fórmula. O axioma A4 nos garante que a dupla negação de uma fórmula implica na afirmação dessa mesma fórmula.[64] Podemos dizer que a negação é *contextualmente definida* através desses axiomas. Repare que a negação (de acordo com os postulados) é um conectivo primitivo. De modo apropriado, dizemos que um conectivo é "definido" quando existe uma fórmula da linguagem que seja seu *definiens*.[65] Essa fórmula poderá conter apenas os conectivos primitivos da linguagem. Como na axiomática de $\mathcal{LPC}$ que apresentamos a negação é um conceito primitivo, ela não seria, de modo apropriado, um conceito definido. Todavia, em uma acepção mais geral, podemos dizer que o conectivo também pode ser definido pelo contexto de seu uso. Como o uso da negação é determinado por seus postulados, podemos então dizer que a negação é contextualmente (mas não diretamente) definida por eles.[66]

Do ponto de vista sintático, a negação (na axiomática de $\mathcal{LPC}$ vista) é compreendida por seus postulados, nos permitindo derivar uma tese da clássica associada à trivialização de $\mathcal{LPC}$ e o PNC, que leva o nome de *Ex Falso Sequitur Quodlibet* (ou, simplesmente, *Ex Falso*).[67] Isto é, de uma contradição "tudo" se segue. Tal tese é denotada pelas fórmulas:[68]

$$(\alpha \wedge \neg\alpha) \to \beta$$
$$\alpha \to (\neg\alpha \to \beta)$$

que exprimem precisamente o fato de que, se uma fórmula α e sua negação $(\neg\alpha)$ são obtidas, então qualquer fórmula β de $\mathcal{LPC}$ é demonstrável – o que implica na trivialidade do sistema. Em vista de preservar a consistência e não-trivialidade da lógica clássica, podemos dizer que *contradições não podem ser toleradas* em $\mathcal{LPC}$ – mas isso não será o caso para os sistemas paraconsistentes, como veremos.

[64] Esse axioma se refere a um princípio clássico, conhecido como *duplex negatio affirmat* [duplamente negar é afirmar].

[65] Chamamos "definiendum" o termo (ou conceito) que queremos definir, e "definiens" a expressão da linguagem que o define.

[66] Nem toda formalização da $\mathcal{LPC}$ tem a negação como primitiva, como visto na abordagem de Nicod (1917). Nesse sistema, utilizando-se da Barra de Sheffer, Nicod é capaz de definir a negação do seguinte modo: $\neg\alpha \stackrel{\text{def}}{=} (\alpha \uparrow \alpha)$. Outra possível abordagem é assumirmos uma constante proposicional, $\bot$, e algum conectivo primitivo, como a condicional, e assim introduzirmos a negação como definida através da seguinte expressão: $\neg\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \alpha \to \bot$

[67] Não apresentaremos a demonstração do *Ex Falso*, que é conhecida na literatura.

[68] Há outras formulações equivalentes (em $\mathcal{LPC}$) do *Ex Falso*, além das que apresentaremos. Além disso, devemos notar que elas não são teses apenas acerca da negação, mas também sobre a condicional material.

5.2.5. *Reductio* Clássico

Ressaltamos um aspecto importante: dada axiomática de $\mathcal{LPC}$, podemos demonstrar a seguinte fórmula como teorema:[69]

Teorema 1 (Redução ao Absurdo Clássica)**.**

$$\vdash_{lpc} (\neg\alpha \to \beta) \to ((\neg\alpha \to \neg\beta) \to \alpha)$$

Demonstração. Uma instância do axioma (A3) é: $(\neg\alpha \to \beta) \to ((\neg\alpha \to \neg\beta) \to \neg\neg\alpha)$ Assumindo a regra de substituição de fórmulas, dado o axioma (A4), podemos substituir qualquer instância de $\neg\neg\alpha$ por α. Portanto, da instância do axioma (A3) acima, obtemos que: $(\neg\alpha \to \beta) \to ((\neg\alpha \to \neg\beta) \to \alpha)$, que é o que gostaríamos de provar. □

E, se ao invés de introduzirmos os axiomas (A3) e (A4), introduzirmos a Redução ao Absurdo Clássica – a axiomatização de Mendelson para $\mathcal{LPC}$ (p. 69):[70]

MP $\alpha, \alpha \to \beta / \beta$

M1 $\alpha \to (\beta \to \alpha)$

M2 $(\alpha \to \beta) \to ((\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to (\alpha \to \gamma))$

M3 $(\neg\alpha \to \beta) \to ((\neg\alpha \to \neg\beta) \to \alpha)$

Note que (M1) é igual ao axioma (A1), e (M2) igual ao (A2), diferindo assim (A3) e (M3). Introduzindo as definições dos operadores, obteríamos como teorema da axiomática de Mendelson as fórmulas de (A3) e (A4):

Teorema 2. Através da axiomática de Mendelson, obtemos como teoremas as seguintes fórmulas:[71]

(1) $\vdash_{lpc^*} \neg\neg\alpha \to \alpha$

(2) $\vdash_{lpc^*} \alpha \to \neg\neg\alpha$

(3) $\vdash_{lpc^*} (\alpha \to \beta) \to ((\alpha \to \neg\beta) \to \neg\alpha)$

[69] Na demonstração do teorema seguinte assumiremos resultados, não apresentados aqui, mas já conhecidos na literatura, como a *regra de substituição de fórmulas equivalentes*. Nesse teorema em particular, posto que já é conhecida a equivalência das fórmulas α e $\neg\neg\alpha$, podemos substituir a ocorrência de uma dessas fórmulas pela outra.

[70] *Cf.* (Mendelson, 1997, p. 35).

[71] Utilizarei $\vdash_{lpc^*}$ para referir a noção de consequência sintática de $\mathcal{LPC}$ utilizando a axiomática de Mendelson.

Demonstração. As provas de (1) e (2) podem ser encontradas em Mendelson (1997, p.38-9). A prova de (3) pode ser facilmente obtida ao substituir $\neg\alpha$ por $\neg\neg\alpha$ no axioma (A3*), obtendo assim que $(\neg\neg\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow ((\neg\neg\alpha \rightarrow \neg\beta) \rightarrow \neg\alpha)$. Como $\alpha \leftrightarrow \neg\neg\alpha$ (dado os teoremas provados acima), podemos substituir as fórmulas $\neg\neg\alpha$ por α, de modo que a instância do axioma dada acima ficaria como: $(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow ((\alpha \rightarrow \neg\beta) \rightarrow \neg\alpha)$ que é o que gostaria de provar em (3) □

Ou seja, ao introduzirmos a *Redução ao Absurdo Clássica* em um sistema com os postulados (MP), (A1)-(A2), obtemos as fórmulas (A3) e (A4); por outro lado, se substituirmos a *Redução ao Absurdo Clássica* no sistema com os postulado (MP), (A1)-(A2), introduzindo assim (A3) e (A4), obtemos então a fórmula que expressa a *Redução ao Absurdo Clássica* como teorema. Desse modo, fixaremos nossa terminologia chamando de "*Redução ao Absurdo Clássica*" a seguinte fórmula:

$$(\neg\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow ((\neg\alpha \rightarrow \neg\beta) \rightarrow \alpha)$$

5.2.6. A Semântica da Negação Clássica

Enquanto que a negação [clássica] é sintaticamente caracterizada por seus postulados, nas semânticas *padrões* de $\mathcal{LPC}$ ela é tratada como um operador que *inverte* o valor-de-verdade da fórmula a ele ligada.[72] Vejamos as definições.

Definição 1 (Valoração de $\mathcal{LPC}$)**.** Uma valoração para $\mathcal{LPC}$ é uma mapeamento $v : \mathfrak{F} \longrightarrow \{1, 0\}$ sendo $\mathfrak{F}$ o conjunto de fórmulas de $\mathcal{LPC}$ e $\{1, 0\}$ o conjunto de valores-de-verdade, onde 1 é valor designado (*verdadeiro*) e 0 valor não-designado (*falso*), tal que:

(0) $v(\alpha) = 1 \Leftrightarrow v(\alpha) \neq 0$

(1) $v(\neg\alpha) = 1 \Leftrightarrow v(\alpha) = 0$

(2) $v(\alpha \rightarrow \beta) = 1 \Leftrightarrow v(\alpha) = 0$ ou $v(\beta) = 1$

(3) $v(\alpha \wedge \beta) = 1 \Leftrightarrow v(\alpha) = v(\beta) = 1$

(4) $v(\alpha \vee \beta) = 1 \Leftrightarrow v(\alpha) = 1$ ou $v(\beta) = 1$

Ao analisarmos as condições da função-valoração v para $\mathcal{LPC}$ podemos encontrar quatro casos diferentes para a valoração da negação [clássica]:[73]

(1) $v(\neg\alpha) = 1 \Leftrightarrow v(\alpha) = 0$

O que se segue:

[72] Compreenderemos aqui como "semântica padrão" da $\mathcal{LPC}$ uma semântica bivalorada com suas definições usuais para os conectivos lógicos.

[73] As consequências de (1) que veremos, *i.e.*, (1.1)-(1.4), podem parecer triviais, mas serão importantes para o que se segue, muito pelo qual estamos chamando a atenção para elas.

(1.1) $v(\neg\alpha) = 1 \Rightarrow v(\alpha) = 0$

(1.2) $v(\neg\alpha) = 0 \Rightarrow v(\alpha) = 1$

Ou, de modo equivalente:

(1.3) $v(\alpha) = 1 \Rightarrow v(\neg\alpha) = 0$

(1.4) $v(\alpha) = 0 \Rightarrow v(\neg\alpha) = 1$

Obtemos da definição (1) da função-valoração para uma fórmula com negação [clássica] os quatro fatos acima (1.1-1.4) que, podemos dizer, caracterizam semanticamente a negação de $\mathcal{LPC}$. Esses fatos são importantes para depois compreendermos as negações dos sistemas não-clássicos, como a negação dos sistemas paraconsistente, paracompleto e não-alético. De acordo com as definições acima, obtemos como teoremas semânticos que:

Teorema 3 (Propriedades Semânticas da Negação (Clássica))**.** Seja α uma fórmula de $\mathcal{LPC}$ e v uma função-valoração *padrão* para $\mathcal{LPC}$.

$$(1)\ v(\alpha) \neq v(\neg\alpha)$$
$$(2)\ v(\alpha) = 1 \text{ ou } v(\neg\alpha) = 1$$
$$(3)\ v(\alpha) = 0 \text{ ou } v(\neg\alpha) = 0$$

Demonstração. Fica como exercício para o leitor.[74] □

Dado os resultados anteriores, a semântica *padrão* da $\mathcal{LPC}$ satisfaz (como é esperado) o PNC e o PTE – tanto em sua versão sintática quanto semântica. Por fim, vejamos um outro resultado importante:[75]

Teorema 4 (Ex Falso I)**.** (I) $\alpha, \neg\alpha \vdash_{lpc} \beta$
(II) $\vdash_{lpc} \alpha \rightarrow (\neg\alpha \rightarrow \beta)$

Demonstração. Fica como exercício para o leitor. □

Como esperado, os dois teoremas anteriores demonstram que o *Ex Falso* é uma *tautologia* de $\mathcal{LPC}$ – condizendo com seus aspectos sintáticos, visto que as versões do *Ex Falso* são teoremas.

5.2.7. Alguns Teoremas Importantes Sobre a Negação Clássica

Vejamos agora alguns resultados importantes, na Lógica Clássica, que evidenciam a natureza de sua negação.[76]

[74] Por questão de brevidade, deixaremos de apresentar resultados e demonstrações conhecidas na literatura, deixando-os como exercício para o leitor.

[75] Nos próximos dois teoremas suporemos a definição usual de validade lógica.

[76] Em uma semântica *padrão*, $\mathcal{LPC}$ é uma teoria semanticamente completa, de modo que todos os teoremas seguintes são também tautologias.

(1) $\vdash_{lpc} \alpha \vee \neg\alpha$ (Princípio do Terceiro Excluído)

(2) $\vdash_{lpc} \neg(\alpha \wedge \neg\alpha)$ (Princípio da Não-Contradição)

(3) $\vdash_{lpc} \neg\neg\alpha \rightarrow \alpha$ (Eliminação da Dupla Negação)

(4) $\vdash_{lpc} \alpha \rightarrow \neg\neg\alpha$ (Introdução da Dupla Negação)

(5) $\vdash_{lpc} (\alpha \wedge \neg\alpha) \rightarrow \beta$ (*Ex Falso*)

(6) $\vdash_{lpc} (\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\neg\beta \rightarrow \neg\alpha)$ (Contraposição)

(7) $\vdash_{lpc} (\neg\alpha \rightarrow \neg\beta) \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)$ (Forma de Contraposição)

(8) $\vdash_{lpc} (\alpha \rightarrow \neg\beta) \rightarrow (\beta \rightarrow \neg\alpha)$ (Forma de Contraposição)

(9) $\vdash_{lpc} \neg(\alpha \wedge \beta) \leftrightarrow (\neg\alpha \vee \neg\beta)$ (De Morgan I)

(10) $\vdash_{lpc} \neg(\alpha \vee \beta) \leftrightarrow (\neg\alpha \wedge \neg\beta)$ (De Morgan II)

(11) $\vdash_{lpc} (\alpha \rightarrow \neg\alpha) \rightarrow \neg\alpha$ (*Consequentia Mirabilis*)

(12) $\vdash_{lpc} (\neg\alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha$ (Forma de *Consequentia Mirabilis*)

(13) $\vdash_{lpc} (\neg\alpha \rightarrow \neg\beta) \rightarrow ((\neg\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \alpha)$ (Reductio ad Absurdum Clássico)

(14) $\vdash_{lpc} (\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow ((\alpha \rightarrow \neg\beta) \rightarrow \neg\alpha)$ (Reductio ad Absurdum Intuicionista)

Esses resultados evidenciam o *peso* da negação nas teorias clássicas. Como veremos à frente, alguns desses teoremas não são obtidos quando utilizamos negações diferentes da negação clássica, como é o caso da negação paraconsistente e da paracompleta.

A negação clássica obedece tanto ao PNC como ao PTE e *Ex Falso*, de modo que todos os teoremas apresentados anteriormente são consequências desses fatos.[77] Para não criar confusões desnecessárias até esse momento, utilizamos o símbolo "$\neg$" para nos referirmos à negação clássica. Todavia, nas seções seguintes discutiremos sistemas não-clássicos cujas negações terão outras propriedades. Assim, para não criarmos confusão, toda vez que utilizarmos "$\neg_c$" como símbolo da negação, estamos nos referindo à negação clássica – apresentada até aqui.[78]

[77] Não é apenas satisfazer o PNC, PTE e *Ex Falso* que garante que a negação em questão será clássica – precisamos garantir, entre outras coisas, que o operadores de consequência (sintática e semântica) preservem certas propriedades.

[78] Doravante, utilizaremos o símbolo "$\neg_p$" para nos referirmos a negação paraconsistente e "$\neg_q$" para a negação paracompleta. Se utilizarmos apenas "$\neg$", esperamos que o contexto esteja claro para identificarmos qual negação está em uso.

5.3. Lógica Paraconsistente

Como vimos, uma teoria consistente implica em sua não-trivialidade – posto que, se a teoria contém negação e não é o caso que uma fórmula e sua negação sejam teoremas, segue que nem toda fórmula da linguagem é teorema. Do mesmo modo, vimos que se um sistema é trivial (e contém negação), isso acarreta em sua inconsistência (visto que todas as fórmulas serão teoremas, inclusive uma fórmula e sua negação). Mas podemos propor a seguinte questão:

Pode haver uma teoria inconsistente e não-trivial, mas na qual o PTE é tese?

Se sim, como seus conectivos (principalmente a *negação*) funcionariam? Quais princípios clássicos seriam satisfeitos e quais não? Teríamos o *Ex Falso* como teorema? Semanticamente, como a negação desse sistema se comporta? A esses desafios que se lançaram os lógicos paraconsistentistas. Como podemos ver em Gomes e D'Ottaviano (2017), a construção das ideias que fundamentaram a Lógica Paraconsistente perpassou diversos autores ao longo da história, da antiguidade até os tempos atuais. No entanto, apenas com o trabalho de da Costa (1963) pudemos obter um sistema paraconsistente que pode ser dito *forte* o suficiente para suportar quantificação e, desse modo, estabelecer teorias mais robustas, como Teoria de Conjuntos Paraconsistentes e toda uma matemática.[79] Outros sistemas paraconsistentes foram oferecidos,[80] no entanto, restringir-nos-emos aos cálculos proposicionais paraconsistentes desenvolvido por da Costa, conhecidos como hierarquia $\mathscr{C}_n\ (0 \leq n \leq \omega)$.[81]

5.3.1. Os Cálculos $\mathscr{C}_n\ (0 \leq n \leq \omega)$

A ideia geral das lógicas paraconsistentes é permitir condições nas quais tanto uma fórmula quanto sua negação [paraconsistente] passam ser obtidas, sem que isso trivialize o sistema. Se contradições são permitidas, então o PNC precisa ser restringido (pois não valerá para todas as fórmulas). Além disso, como observamos na seção anterior, uma contradição na $\mathcal{LPC}$ a trivializa, posto o *Ex Falso*: de uma contradição, qualquer fórmula se segue. Portanto, um desafio geral é formalizarmos o sistema paraconsistente de modo que nem o PNC, e tampouco o *Ex Falso* sejam teoremas (para toda fórmula). Para isso, da Costa (1963) nos oferece os sistemas $\mathscr{C}_n\ (0 \leq n \leq \omega)$.[82] Trataremos aqui do sistema $\mathscr{C}_1$, começando por sua linguagem. Seja $\mathcal{P}$ um conjunto não-vazio, denumerável, de *variáveis proposicionais* e $\mathcal{F}$ o conjunto de *Fórmulas* de $\mathscr{C}_1$, definido indutivamente como:

[79] *Cf.* da Costa et al. (2007, 1998) e De Carvalho e D'Ottaviano (2005).

[80] *Cf.* Priest (1979) e Priest (2008).

[81] da Costa (1963) desenvolveu não apenas *um* cálculo proposicional paraconsistente, mas sim uma *hierarquia* de cálculos proposicionais $\mathscr{C}_n\ (0 \leq n \leq \omega)$. Ao nos referirmos ao cálculo proposicional paraconsistente, nos restringiremos por enquanto ao cálculo $\mathscr{C}_1$ dessa hierarquia. *Cf.* da Costa et al. (2007).

[82] Notamos que, nos cálculos $\mathscr{C}_n\ (0 \leq n \leq \omega)$, a negação paraconsistente é um conectivo primitivo da linguagem.

$$\alpha \stackrel{\text{def}}{=} p_i \,|\, \neg_p \alpha \,|\, \alpha \to \beta \,|\, \alpha \wedge \beta \,|\, \alpha \vee \beta \,|$$

onde $p_i \in \mathcal{P}$ e i é um número natural; α e β são fórmulas; e os símbolos $\neg_p$, $\to$, $\wedge$ e $\vee$ denotam os conectivos (primitivos) da negação paraconsistente, condicional, conjunção e disjunção, respectivamente. A bicondicional é definida de modo usual.

Antes de apresentarmos os postulados de $\mathscr{C}_1$, precisamos ter em mente que o PNC não será válido para *todas* as fórmulas. Todavia, da Costa (1963) define um operador de *bom comportamento* para algumas fórmulas do seguinte modo:[83]

Definição 2 (Operador-$^\circ$)**.** $\alpha^\circ \stackrel{\text{def}}{=} \neg_p(\alpha \wedge \neg_p \alpha)$

Após essa definição, podemos então adentrar ao conjunto de postulados de $\mathscr{C}_1$.

Postulados 2 (Cálculo $\mathscr{C}_1$)**.**

$\mathscr{C}1$ $\alpha \to (\beta \to \alpha)$

$\mathscr{C}2$ $(\alpha \to \beta) \to ((\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to (\alpha \to \gamma))$

$\mathscr{C}3$ $\alpha, \alpha \to \beta / \beta$

$\mathscr{C}4$ $(\alpha \wedge \beta) \to \alpha$

$\mathscr{C}5$ $(\alpha \wedge \beta) \to \beta$

$\mathscr{C}6$ $\alpha \to (\beta \to (\alpha \wedge \beta))$

$\mathscr{C}7$ $\alpha \to (\alpha \vee \beta)$

$\mathscr{C}8$ $\alpha \to (\beta \vee \alpha)$

$\mathscr{C}9$ $(\alpha \to \gamma) \to ((\beta \to \gamma) \to ((\alpha \vee \beta) \to \gamma))$

$\mathscr{C}10$ $\beta^\circ \to ((\alpha \to \beta) \to ((\alpha \to \neg_p \beta) \to \neg_p \alpha))$

$\mathscr{C}11$ $(\alpha^\circ \wedge \beta^\circ) \to ((\alpha \wedge \beta)^\circ \wedge (\alpha \vee \beta)^\circ) \wedge (\alpha \to \beta)^\circ)$

$\mathscr{C}12$ $\alpha \vee \neg_p \alpha$

$\mathscr{C}13$ $\neg_p \neg_p \alpha \to \alpha$

Note que $\mathscr{C}_1$ satisfaz o PTE, de modo que, uma vez que uma fórmula satisfaça o PNC (*i.e.*, seja bem comportada), essa fórmula se comportará como uma fórmula clássica.

Como é apresentado em da Costa et al. (2007, Th. 6), as seguintes fórmulas *não* são teoremas de $\mathscr{C}_1$:[84]

[83] Assumiremos aqui diversas outras definições prévias que devem ser feitas como, por exemplo, a noção de consequência sintática e semântica. Para mais, ver da Costa et al. (2007).

[84] Como dito anteriormente, o sistema $\mathscr{C}_0$ é equivalente a $\mathcal{LPC}$, sendo $\mathscr{C}_1$ o primeiro cálculo paraconsistente. Portanto, as fórmulas seguintes não são teoremas de $\mathscr{C}_1$, mas são de $\mathscr{C}_0$. *Cf.* da Costa et al. (2007, p.807).

(1) $\neg_p\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)$

(2) $\neg_p\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \neg_p\beta)$

(3) $\alpha \rightarrow (\neg_p\alpha \rightarrow \beta)$

(4) $\alpha \rightarrow (\neg_p\alpha \rightarrow \neg_p\beta)$

(5) $(\alpha \wedge \neg_p\alpha) \rightarrow \beta$

(6) $(\alpha \wedge \neg_p\alpha) \rightarrow \neg_p\beta$

(7) $(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow ((\alpha \rightarrow \neg_p\beta) \rightarrow \neg_p\alpha)$

(8) $\alpha \rightarrow \neg_p\neg_p\alpha$

(9) $(\alpha \leftrightarrow \neg_p\alpha) \rightarrow \beta$

(10) $(\alpha \leftrightarrow \neg_p\alpha) \rightarrow \neg\beta$

(11) $\neg_p(\alpha \wedge \neg_p\alpha)$

(12) $(\alpha \wedge \neg_p\alpha) \rightarrow \neg_p(\alpha \wedge \neg_p\alpha)$

Os resultados (1)-(4) apresentam formulações do *Ex Falso*. Todas essas fórmulas são teoremas da $\mathcal{LPC}$ e $\mathscr{C}_0$, mas não são obtidas em $\mathscr{C}_1$ – a não ser que utilizemos da *negação forte*, que definiremos à frente.

5.3.2. Negação Paraconsistente, Bom Comportamento e Negação Forte

O que vimos evidencia um aspecto importante quanto à negação paraconsistente: a negação paraconsistente não é equivalente à negação clássica. No desenvolvimento do cálculo $\mathscr{C}_1$, da Costa (1963) também oferece uma definição do que ele chama de "negação forte".

Definição 3 (Negação (Paraconsistente) Forte)**.** $\neg^\star_p\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \neg_p\alpha \wedge \alpha^\circ$

Repare que a definição nos diz que se uma fórmula satisfaz o PNC, e obtemos sua negação [paraconsistente], então ela é *fortemente* negada. Lembrando que as fórmulas de $\mathscr{C}_1$ satisfazem o PTE (axioma $\mathscr{C}$12), uma vez que ela também satisfaça o PNC (*i.e.*, seja bem comportada), a negação [paraconsistente] dessa fórmula terá as propriedades da negação clássica. Deste modo, podemos entender a *Negação Forte* como sendo a *negação clássica* de uma fórmula. Apenas como um exemplo, vejamos o *Ex Falso* utilizando-se da negação forte:

Teorema 5. $\vdash_{C_1} \alpha \rightarrow (\neg^\star_p\alpha \rightarrow \beta)$

Demonstração. Em da Costa et al. (2007, Th. 22). □

E obtemos como corolário desse teorema o seguinte resultado:

Corolário 1. $\vdash_{C_1} (\alpha \wedge \neg_p^{\star}\alpha) \rightarrow \beta$

Ou seja, se obtemos uma contradição com uma fórmula bem comportada, então trivializamos o sistema (pois inferimos qualquer fórmula β). No entanto, como vimos acima, todas as quatro versões do *Ex Falso*, (1)-(4), não são teoremas. De fato, se todas as fórmulas que vimos anteriormente que não são obtidas em $\mathscr{C}_1$, trocarmos a negação paraconsistente pela negação forte, todas elas serão teoremas de $\mathscr{C}_1$. Isso é evidenciado em da Costa et al. (2007, Th.16, Th.17).

Outro aspecto importante diz respeito ao operador de bom comportamento, evidenciado pelo chamado "Teorema de Arruda":

Teorema 6 (A. I. Arruda)**.** $\vdash_{C_1} \alpha^{\circ\circ}$

Demonstração. Em da Costa et al. (2007, Th. 18, p.804). □

O que leva a um outro teorema importante:

Corolário 2. $\vdash_{C_1} \alpha^{\circ} \rightarrow (\neg_p\alpha)^{\circ}$

Demonstração. Em da Costa et al. (2007, Th. 19, p.804). □

Para o corolário seguinte, utilizaremos a expressão $\neg_p^1 ... \neg_p^n \alpha$ para denotar uma fórmula (finita) com n reiterações da negação paraconsistente. Deste modo, para uma n = 5, a expressão $\neg_p^1 ... \neg_p^5 \alpha$ será equivalente a fórmula $\neg_p\neg_p\neg_p\neg_p\neg_p\alpha$.

Corolário 3. $\vdash_{C_1} \alpha^{\circ} \rightarrow (\neg_p^1 ... \neg_p^n \alpha)^{\circ}$

Demonstração. A prova se segue por indução. Suponha que (a) α°, pelo Corolário 2 (p. 79) obtemos que (a.1) $(\neg_p^1\alpha)^{\circ}$. De (a.1), pelo Corolário 2, obtemos que (a.2) $(\neg_p^1\neg_p^2\alpha)^{\circ}$. Podemos repetir o procedimento até $\neg_p^1 ... \neg_p^{n-1}\alpha$ que, pelo Corolário 2 obteremos (b) $(\neg_p^1 ... \neg_p^n\alpha)^{\circ}$. Por esse resultado, e uma constante aplicação do *Silogismo Hipotético* (garantido pelo axioma $\mathscr{C}2$), obtemos que $\alpha^{\circ} \rightarrow (\neg_p^1 ... \neg_p^n \alpha)^{\circ}$. □

Podemos inferir desses teoremas que, se uma fórmula é bem comportada, a negação dessa fórmula também o é. Em outras palavras, se a fórmula α satisfaz o PNC, então a fórmula $\neg_p\alpha$ também o satisfaz. Desse modo, se α° é o caso, obtemos (trivialmente, dada a definição do bom comportamento) que *não* poderá ocorrer que $\alpha \wedge \neg_p\alpha$. Todavia, também se seguirá que não poderá ocorrer de $\neg_p\alpha \wedge \neg_p\neg_p\alpha$, nem $\neg_p\neg_p\alpha \wedge \neg_p\neg_p\neg_p\alpha$, e assim por diante. Isso é equivalente a dizermos que, se uma fórmula α é bem comportada, seja qual for o número de negações $\neg_p$ que colocarmos à sua frente, todas elas serão *negações fortes* (*i.e.*, terão o comportamento da negação clássica).

5.3.3. *Reductio* Paraconsistente e *Reductio* Clássico

Vejamos outro aspecto importante do cálculo $\mathscr{C}_1$, que é o axioma $\mathscr{C}10$, que chamaremos de "Redução ao Absurdo Paraconsistente":

$$\beta^{\circ} \rightarrow ((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow ((\alpha \rightarrow \neg_p \beta) \rightarrow \neg_p \alpha))$$

Note que, de acordo com as definições apresentadas anteriormente, se é o caso que β° e $\neg_p \beta$, então temos um caso de $\neg_p^{\star}\beta$ – *i.e.*, temos que a negação de β se comporta como a negação clássica (entendendo a *negação forte* com as mesmas propriedades da *negação clássica*). Deste modo, podemos utilizar a definição da *negação forte* (Def. 3) e reescrever o axioma $\mathscr{C}10$ como:

$$(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow ((\alpha \rightarrow \neg_p^{\star} \beta) \rightarrow \neg_p \alpha))$$

E, uma vez que a negação forte ($\neg_p^{\star}$) preserva as propriedades da negação clássica, poderíamos *compreender intuitivamente* o axioma $\mathscr{C}10$ como:[85]

$$(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow ((\alpha \rightarrow \neg_c \beta) \rightarrow \neg_p \alpha))$$

Esse fato será importante para o que viremos a desenvolver.

5.3.4. A Semântica da Negação Paraconsistente

Não desenvolveremos toda a semântica dos cálculos $\mathscr{C}_n$ $(0 \leq n \leq \omega)$ aqui. Todavia, existem alguns aspectos semânticos da negação paraconsistente que precisam ser levados em consideração. Como vimos em $\mathcal{LPC}$, a valoração da negação clássica é dada como:

1 $v(\neg_c \alpha) = 1$ sse $v(\alpha) = 0$

O que se segue:

1.1 Se $v(\neg_c \alpha) = 1$, então $v(\alpha) = 0$

1.2 Se $v(\neg_c \alpha) = 0$, então $v(\alpha) = 1$

Ou, de modo equivalente:

1.3 Se $v(\alpha) = 1$, então $v(\neg_c \alpha) = 0$

1.4 Se $v(\alpha) = 0$, então $v(\neg_c \alpha) = 1$

[85] Note que $\neg_c$ não é um conectivo de negação dos cálculos $\mathscr{C}_n$ $(0 \leq n \leq \omega)$, mas sim o conectivo de negação de $\mathcal{LPC}$. Assim, a fórmula a seguir tem como característica apenas uma compreensão intuitiva do funcionamento da Redução ao Absurdo Paraconsistente.

A definição (1), e suas quatro consequências (1.1-1.4), coadunam-se com o fato de que a negação clássica satisfaz tanto o PNC quanto o PTE. No entanto, a negação paraconsistente (quando não ligada a uma fórmula bem comportada) satisfaz o PTE (visto o axioma $\mathscr{C}12$), mas não o PNC. Por conta desses fatos, a definição da função-valoração para a negação paraconsistente irá divergir da definição (1) para a negação clássica.

Uma vez que pode ser obtido uma fórmula como $\alpha \wedge \neg_p\alpha$, e como a definição da função-valoração da conjunção é a mesma,[86] tanto a fórmula α quanto a sua negação paraconsistente, $\neg_p\alpha$, podem ser verdadeiras sob uma mesma valoração. Todavia, não pode ocorrer que tanto α quanto sua negação paraconsistente sejam *falsas* ao mesmo tempo – dado o PTE, que é um postulado. Podemos inferir que se $v(\alpha) = 0$, segue que $v(\neg_p\alpha) = 1$; ou, de outro modo, se $v(\neg_p\alpha) = 0$, então $v(\alpha) = 1$. Mas o contrário não acontece. Isso é, se temos que $v(\alpha) = 1$, não podemos garantir que a valoração da fórmula $\neg_p\alpha$ será 0 (ou, de modo equivalente, se $v(\neg_p\alpha) = 1$, não podemos garantir que $v(\alpha) = 0$) – uma vez que ambas podem ser verdadeiras. Portanto, podemos definir uma valoração para a negação paraconsistente do seguinte modo:

2 Se $v(\neg_p\alpha) = 0$, então $v(\alpha) = 1$

Do que se segue:

2.1 Se $v(\alpha) = 0$, então $v(\neg_p\alpha) = 1$

O que vemos nessa definição (2) é um aspecto central para a valoração de $\mathscr{C}_1$: só obtemos que uma fórmula (ou sua negação paraconsistente) é verdadeira se soubermos que sua negação paraconsistente (ou a fórmula sem negação) é falsa. Vejamos a definição completa de valoração para $\mathscr{C}_1$:[87]

Definição 4 (Valoração de $\mathscr{C}_1$)**.** Uma valoração para $\mathscr{C}_1$ é uma mapeamento $v : \mathfrak{F} \longrightarrow \{1, 0\}$ sendo $\mathfrak{F}$ o conjunto de fórmulas de $\mathscr{C}_1$ e $\{1, 0\}$ o conjunto de valores-de-verdade, onde 1 é valor designado e 0 valor não-designado, tal que:

(0) $v(\alpha) = 1 \Leftrightarrow v(\alpha) \neq 0$

(1) $v(\alpha) = 0 \Rightarrow v(\neg_p\alpha) = 1$

(2) $v(\neg_p\neg_p\alpha) = 1 \Rightarrow v(\alpha) = 1$

(3) $v(\beta^\circ) = v(\alpha \rightarrow \beta) = v(\alpha \rightarrow \neg_p\beta) = 1 \Rightarrow v(\alpha) = 0$

(4) $v(\alpha \rightarrow \beta) = 1 \Leftrightarrow v(\alpha) = 0$ ou $v(\beta) = 1$

(5) $v(\alpha \wedge \beta) = 1 \Rightarrow v(\alpha) = v(\beta) = 1$

(6) $v(\alpha \vee \beta) = 1 \Rightarrow v(\alpha) = 1$ ou $v(\beta) = 1$

[86] Isto é, $v(\alpha \wedge \beta) = 1 \Leftrightarrow v(\alpha) = v(\beta) = 1$.

[87] *Cf.* da Costa e Alves (1977) e (da Costa et al., 2007, p.821, Def. 102).

(7) $v(\alpha^\circ) = v(\beta^\circ) = 1 \Rightarrow v((\alpha \wedge \beta)^\circ) = v((\alpha \vee \beta)^\circ) = v((\alpha \rightarrow \beta)^\circ) = 1$

Com essa definição, podemos provar que o PTE é tautologia de $\mathscr{C}_1$, mas nem PNC e nem o *Ex Falso* são tautologias desse sistema.

Teorema 7.

(PTE) $\vDash_{C_1} \alpha \vee \neg_p \alpha$

(PNC) $\nvDash_{C_1} \neg_p(\alpha \wedge \neg_p \alpha)$

(EF) $\nvDash_{C_1} \alpha \rightarrow (\neg_p \alpha \rightarrow \beta)$

Demonstração. Fica como exercício para o leitor. □

No entanto, vejamos o que acontece se supormos que α é bem comportado:

Teorema 8. Dada a definição de valoração para o cálculo $\mathscr{C}_1$ (Def. 4), obtemos que:

$$\alpha^\circ \nvDash_{C_1} \alpha \rightarrow (\neg_p \alpha \rightarrow \beta)$$

Demonstração. Suponha portanto que (a) $v(\alpha^\circ) = 1$ e (b) $v(\alpha \rightarrow (\neg_p \alpha \rightarrow \beta)) = 0$. Dada a definição do operador de bom comportamento $^\circ$, (a) significa $v(\neg_p(\alpha \wedge \neg_p \alpha)) = 1$. De (b) segue que (c.1) $v(\alpha) = 1$ e (c.2) $v(\neg_p \alpha \rightarrow \beta) = 0$. De (c.2) obtemos que (d.1) $v(\neg_p \alpha) = 1$ e (d.2) $v(\beta) = 0$. □

Mas não é o que queremos. Repare que, ao aceitarmos a valoração apresentada em da Costa et al. (2007, Def. 102) (Def. 4 apresentada acima), não conseguimos obter algo importante: se uma fórmula é bem comportada, então da sua contradição segue qualquer coisa (*Ex Falso*). Mas nós esperávamos que isso se seguisse, uma vez que, dada toda a construção da teoria, se uma fórmula é bem comportada, então ela satisfaz tanto o PTE como o PNC – de modo que sua negação tenha propriedades equivalentes à negação clássica. Para o *Ex Falso* seguir como tautologia para fórmulas bem comportadas, precisamos então adicionar mais uma condição à Def. 4 acima:

(8) $v(\neg_p \alpha) = v(\alpha^\circ) = 1 \Rightarrow v(\alpha) = 0$

O que seguirá também que:

(8.1) $v(\alpha) = v(\alpha^\circ) = 1 \Rightarrow v(\neg_p \alpha) = 0$

Através da adição dessas cláusulas na definição da valoração, podemos obter, por fim, o *Ex Falso*.[88]

[88] Parece um fato comum os autores esquecerem de adicionar a cláusula (8) na definição de valoração para $\mathscr{C}_1$. *Cf.* da Costa et al. (2007, Def. 102, p.821), Grana (2007, p.59-61) e Grana (1990b, p.38). Mas note que tais autores, quando oferecem uma definição para conjunto maximal não-trivial Γ, tratam de determinar que $\neg_p \alpha, \alpha^\circ \in \Gamma \Rightarrow \alpha \notin \Gamma$ (da Costa et al., 2007, Th. 101, p.821) – o que garante a cláusula (8) – esquecendo-se apenas de introduzir tal característica na definição da valoração para $\mathscr{C}_1$.

Teorema 9. $\alpha^{\circ} \vDash_{C_1} \alpha \rightarrow (\neg_p \alpha \rightarrow \beta)$

Demonstração. Suponha portanto que (a) $\upsilon(\alpha^{\circ}) = 1$ e (b) $\upsilon(\alpha \rightarrow (\neg_p \alpha \rightarrow \beta)) = 0$. Dada a definição do operador de bom comportamento $^{\circ}$, (a) significa $\upsilon(\neg_p(\alpha \wedge \neg_p \alpha)) = 1$. De (b) segue que (c.1) $\upsilon(\alpha) = 1$ e (c.2) $\upsilon(\neg_p \alpha \rightarrow \beta) = 0$. De (c.2) obtemos que (d.1) $\upsilon(\neg_p \alpha) = 1$ e (d.2) $\upsilon(\beta) = 0$. Visto a cláusula (8), temos que $\upsilon(\neg_p \alpha) = \upsilon(\alpha^{\circ}) = 1$, o que segue que (d) $\upsilon(\alpha) = 0$. Mas de (d) e (c.1) obtemos uma contradição semântica. Logo, $\alpha^{\circ} \vDash_{C_1} \alpha \rightarrow (\neg_p \alpha \rightarrow \beta)$ é tautologia. □

Corolário 4 (Variantes do *Ex Falso* em $\mathscr{C}_1$)**.**

a) $\vDash_{C_1} \alpha^{\circ} \rightarrow (\alpha \rightarrow (\neg_p \alpha \rightarrow \beta))$

b) $\alpha^{\circ} \vDash_{C_1} (\alpha \wedge \neg_p \alpha) \rightarrow \beta)$

c) $\vDash_{C_1} \alpha^{\circ} \rightarrow ((\alpha \wedge \neg_p \alpha) \rightarrow \beta))$

Demonstração. A prova de (a) se segue diretamente do Teo. 9 aplicando-se a versão semântica do *teorema da dedução* – que é válido para o sistema $\mathscr{C}_1$.[89] A prova de (b) é similar a demonstração do Teo. 9 e (c) segue-se de (b) aplicando-se, novamente, o *teorema da dedução*. □

5.4. Lógica Paracompleta

Ao discutirmos as propriedades de consistência e trivialidade, vimos que se uma teoria é *trivial*, então toda fórmula será teorema – caso esse que chamamos teoria "supercompleta". E, do mesmo modo, se uma teoria é incompleta, então ela não será trivial, visto que não será o caso que toda fórmula ou sua negação são teoremas. Mas podemos agora propor uma outra questão:

Pode então haver uma teoria consistente, não-trivial, mas que o PTE não é tese?

Se sim, como seus conectivos (principalmente a *negação*) funcionaria? Quais princípios clássicos seriam satisfeitos e quais não? Teríamos o *Ex Falso* como teorema? E o PTE? Semanticamente, como a negação desse sistema se comporta? A esses desafios que se lançaram aqueles que desenvolveram as lógicas categorizadas como *paracompletas*. De modo geral, a história das lógicas paracompletas remontam àqueles que, de algum modo, queriam impedir a aplicação geral do PTE. Desse modo, os primeiros sistemas paracompletos foram os desenvolvidos para tratar da teoria *intuicionista*, cuja validade do PTE é posta em causa.[90] No entanto, enquanto que os sistemas lógicos intuicionistas rejeitem o PTE, a semântica oferecida – para ser precisa com o programa intuicionista – não será uma semântica de valorações tal como apresentamos para a lógica clássica ou paraconsistente,

[89] *Cf.* (da Costa et al., 2007, Th. 5, p. 800).
[90] *Cf.* Heyting (1956, p.1).

mas deverá envolver noções como *construção* e *intuição mental*. Não queremos nos adentrar nas especificidades do intuicionismo e suas relações com as lógicas paracompletas. Portanto, restringiremos nossa análise a um sistema paracompleto específico, chamado "Cálculo Proposicional Paracompleto", desenvolvido por da Costa e Marconi (1986).[91]

5.4.1. Os Cálculos $\mathscr{P}_n$ $(0 \leq n \leq \omega)$

A ideia geral das lógicas paracompletas, como visto, é restringir o PTE. No entanto, como vimos tanto em $\mathcal{LPC}$ como em $\mathscr{C}_1$, o PTE é uma tese. Vamos apresentar aqui o sistema $\mathscr{P}_1$, começando por sua linguagem. Seja $\mathcal{P}$ um conjunto não-vazio, denumerável, de *variáveis proposicionais* e $\mathcal{F}$ o conjunto de *Fórmulas* de $\mathscr{P}_1$, definido indutivamente tal como se segue:

$$\alpha \stackrel{\text{def}}{=} p_i \,|\, \neg_q \alpha \,|\, \alpha \rightarrow \beta \,|\, \alpha \wedge \beta \,|\, \alpha \vee \beta \,|$$

onde $p_i \in \mathcal{P}$ e i é um número natural; α e β são fórmulas; e os símbolos $\neg_q$, $\rightarrow$, $\wedge$ e $\vee$ denotam os conectivos (primitivos) da negação paracompleta, implicação material, conjunção e disjunção, respectivamente. A bicondicional é definida de modo usual.[92]

Posto que o PTE é restringido, a fórmula $\alpha \vee \neg_q \alpha$ não pode nem figurar entre os axiomas, como também não pode ser obtido como teorema. Todavia, da Costa e Marconi (1986) definem um operador de *bom comportamento*, similar ao operador-$^\circ$ do cálculo $\mathscr{C}_1$, para algumas fórmulas. Em geral, não está garantido a todas as fórmulas α que $\alpha \vee \neg_q \alpha$. No entanto, se uma fórmula é dita *bem comportada* (ou seja operada pelo operador-$^\bullet$, conhecido como "bola fechada" ou de "bom comportamento [paracompleto]"), então essa fórmula satisfará o PTE. Eles definem então o operador de bom comportamento do seguinte modo:

Definição 5 (Operador-$^\bullet$)**.** $\alpha^\bullet \stackrel{\text{def}}{=} \alpha \vee \neg_q \alpha$

Após a definição do operador de *bom comportamento* podemos ver o conjunto de postulados de $\mathscr{P}_1$.

Postulados 3 (Cálculo $\mathscr{P}_1$)**.**

$\mathscr{P}1$ $(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow ((\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma))$

$\mathscr{P}2$ $\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)$

[91] Em da Costa e Marconi (1986), tal como o cálculo proposicional paraconsistente $\mathscr{C}_n$ $(1 \leq n \leq \omega)$, desenvolveram não apenas *um* cálculo proposicional paracompleto, mas sim uma *hierarquia* de Cálculos Proposicionais Paracompletos $\mathscr{P}_n$ $(0 \leq n \leq \omega)$. Ao nos referirmos ao cálculo proposicional paracompleto, nos restringiremos ao cálculo $\mathscr{P}_1$ dessa hierarquia. Devemos notar que, nos cálculos $\mathscr{P}_n$ $(0 \leq n \leq \omega)$, a negação paracompleta é um conectivo primitivo da linguagem.

[92] Utilizaremos o símbolo "$\neg_q$" para simbolizar a *negação paracompleta*. Do mesmo modo, utilizaremos $\vdash_{P_1}$ e $\vDash_{P_1}$ para as noções de consequência sintática e semântica, respectivamente, da Lógica Paracompleta. Assumiremos aqui diversas outras definições prévias que devem ser feitas como, por exemplo, a noção de consequência sintática e semântica. *Cf.* Grana (2007).

$\mathscr{P}3$ $\alpha, \alpha \to \beta / \beta$

$\mathscr{P}4$ $((\alpha \to \beta) \to \alpha) \to \alpha$

$\mathscr{P}5$ $(\alpha \wedge \beta) \to \alpha$

$\mathscr{P}6$ $(\alpha \wedge \beta) \to \beta$

$\mathscr{P}7$ $\alpha \to (\beta \to (\alpha \wedge \beta))$

$\mathscr{P}8$ $\alpha \to (\alpha \vee \beta)$

$\mathscr{P}9$ $\beta \to (\alpha \vee \beta)$

$\mathscr{P}10$ $(\alpha \to \gamma) \to ((\beta \to \gamma) \to ((\alpha \vee \beta) \to \gamma))$

$\mathscr{P}11$ $\alpha^{\bullet} \to ((\alpha \to \beta) \to ((\alpha \to \neg_q \beta) \to \neg_q \alpha))$

$\mathscr{P}12$ $(\alpha^{\bullet} \wedge \beta^{\bullet}) \to ((\alpha \to \beta)^{\bullet} \wedge (\alpha \wedge \beta)^{\bullet} \wedge (\alpha \vee \beta)^{\bullet}) \wedge (\neg_q \alpha)^{\bullet})$

$\mathscr{P}13$ $\neg_q(\alpha \wedge \neg_q \alpha)$

$\mathscr{P}14$ $\alpha \to (\neg_q \alpha \to \beta)$

$\mathscr{P}15$ $\alpha \to \neg_q \neg_q \alpha$

Note que $\mathscr{P}_1$ satisfaz o PNC (axioma $\mathscr{P}13$), de modo que, uma vez que uma fórmula satisfaça o PTE (*i.e.*, seja o caso que $\alpha^{\bullet}$), essa fórmula se comportará como uma fórmula clássica.

Como é apresentado em Grana (2007, p.70), as seguintes fórmulas *não* são teoremas de $\mathscr{P}_1$:

(1) $\alpha \vee \neg_q \alpha$

(2) $\neg_q(\alpha \vee \beta) \leftrightarrow (\neg_q \alpha \wedge \neg_q \beta)$

(3) $\neg_q(\alpha \wedge \beta) \leftrightarrow (\neg_q \alpha \vee \neg_q \beta)$

(4) $\neg_q \neg_q \alpha \to \alpha$

(5) $(\alpha \to \beta) \to (\neg_q \beta \to \neg_q \alpha)$

Em contrapartida, as seguintes fórmulas são teoremas de $\mathscr{P}_1$:

(1) $\vdash_{P_1} (\alpha \wedge \neg_q \alpha) \to \beta$

(2) $\vdash_{P_1} \alpha \vee (\alpha \to \beta)$

(3) $\vdash_{P_1} \alpha^{\bullet} \to (\neg_q \neg_q \alpha \to \alpha)$

Repare que (1) é o *Ex Falso*, enquanto que em (3) obtemos que, se uma fórmula é *bem comportada*, então a *eliminação da dupla negação* se segue – uma vez que, em fórmulas bem comportada, a negação paracompleta terá as propriedades da negação clássica.

5.4.2. Negação Paracompleta, Bom Comportamento e Negação Forte

O que vimos até agora nos evidencia um aspecto muito importante da negação paracompleta: ela não é equivalente nem à negação clássica, nem à paraconsistente. Nos desenvolvimentos dos cálculos $\mathscr{P}_n$ $(0 \leq n \leq \omega)$, da Costa e Marconi (1986) também oferecem uma definição do que chamam de "negação forte" (para o cálculo paracompleto):

Definição 6 (Negação (Paracompleta) Forte)**.** $\neg_q^{\star}\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \neg_q\alpha \wedge \alpha^{\bullet}$

Lembrando que as fórmulas de $\mathscr{P}_1$ satisfazem o PNC (axioma $\mathscr{P}13$), uma vez que uma fórmula de $\mathscr{P}_1$ também satisfaça o PTE, a negação [paracompleta] dessa fórmula terá as propriedades da negação clássica. Desse modo, podemos entender a *Negação (Paracompleta) Forte* como sendo a *negação clássica* de uma fórmula.

Um aspecto importante que temos de ressaltar, que diz respeito ao operador de bom comportamento do cálculo paracompleto, é evidenciado por uma variação do teorema 2 para $\mathscr{P}_1$:

Corolário 5. Em $\mathscr{P}_1$, temos que $\vdash_{P_1} \alpha^{\bullet} \rightarrow (\neg_q\alpha)^{\bullet}$

Demonstração. $\alpha^{\bullet} \rightarrow (\neg_q\alpha)^{\bullet}$ significa que $(\alpha \vee \neg_q\alpha) \rightarrow (\neg_q\alpha \vee \neg_q\neg_q\alpha)$. Suponha que (a) $\alpha \vee \neg_q\alpha$. Ou seja, ou temos (a.1) α ou temos (a.2) $\neg_q\alpha$. De (a.1) α, aplicando o axioma $\mathscr{P}15$ obtemos (a.1.1) $\neg_q\neg_q\alpha$ e, de (a.1.1) pelo axioma $\mathscr{P}9$ obtemos (b) $\neg_q\alpha \vee \neg_q\neg_q\alpha$. De (a.2) $\neg_q\neg_q\alpha$, aplicando o axioma $\mathscr{P}8$ obtemos novamente (c) $\neg_q\alpha \vee \neg_q\neg_q\alpha$. Dado o axioma $\mathscr{P}10$, de (a.1) obtemos (c) – $\alpha \rightarrow (\neg_q\alpha \vee \neg_q\neg_q\alpha)$; e de (a.2) obtemos (c) – $\neg_q\alpha \rightarrow (\neg_q\alpha \vee \neg_q\neg_q\alpha)$. Portanto, por $\mathscr{P}10$, obtemos que $(\alpha \vee \neg_q\alpha) \rightarrow (\neg_q\alpha \vee \neg_q\neg_q\alpha)$. □

Para o corolário seguinte, utilizaremos a expressão $\neg_q^1 ... \neg_q^n \alpha$ para denotar uma fórmula (finita) com n reiterações da negação paracompleta.

Corolário 6. Em $\mathscr{P}_1$, temos que $\vdash_{P_1} \alpha^{\bullet} \rightarrow (\neg_q^1 ... \neg_q^n \alpha)^{\bullet}$

Demonstração. A prova se segue por indução. Suponha que (a) $\alpha^{\bullet}$, pelo Corolário 5 (p. 86) obtemos que (a.1) $(\neg_q^1\alpha)^{\bullet}$. De (a.1), pelo Corolário 5, obtemos que (a.2) $(\neg_q^1\neg_q^2\alpha)^{\bullet}$. Podemos repetir o procedimento até $\neg_q^1 ... \neg_q^{n-1}\alpha$ que, pelo Corolário 5 obteremos (b) $(\neg_q^1 ... \neg_q^n\alpha)^{\bullet}$. Por esse resultado, e uma constante aplicação do *Silogismo Hipotético* (garantido pelo axioma $\mathscr{P}1$), obtemos que $\alpha^{\bullet} \rightarrow (\neg_q^1 ... \neg_q^n\alpha)^{\bullet}$. □

Podemos inferir desses teoremas que, se uma fórmula é bem comportada, a negação dessa fórmula também o é. Em outras palavras, se a fórmula α satisfaz o PTE, então a fórmula $\neg_q\alpha$ também o satisfaz. Assim, se $\alpha^{\bullet}$ é o caso, obtemos que $\alpha \vee \neg_q\alpha$, $\neg_q\alpha \vee \neg_q\neg_q\alpha$, como também $\neg_q\neg_q\alpha \vee \neg_q\neg_q\neg_q\alpha$ e assim por diante. Isso é equivalente dizermos que, se uma fórmula é bem comportada, não importa o número de negações paracompletas que colocarmos a sua frente, todas elas serão *negações (paracompletas) fortes*.

5.4.3. *Reductio* Paracompleto, Paraconsistente e Clássico

Vejamos agora um outro aspecto importante do cálculo $\mathscr{P}_1$, que é o axioma $\mathscr{P}11$, que chamaremos de "Redução ao Absurdo Paracompleta":

$$\alpha^{\bullet} \rightarrow ((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow ((\alpha \rightarrow \neg_q \beta) \rightarrow \neg_q \alpha))$$

De acordo com as definições apresentadas anteriormente, se é o caso que $\alpha^{\bullet}$ e $\neg_q \alpha$, então temos um caso de $\neg_q^{\star} \alpha$. Desse modo, podemos utilizar a definição da *negação forte (Def. 6)* e reescrever o axioma $\mathscr{P}11$ como:

$$(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow ((\alpha \rightarrow \neg_q \beta) \rightarrow \neg_q^{\star} \alpha)$$

E, uma vez que a *negação [paracompleta] forte* ($\neg_q^{\star}$) preserva as propriedades da negação clássica, poderíamos *compreender intuitivamente* o axioma $\mathscr{P}11$ como:

$$(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow ((\alpha \rightarrow \neg_q \beta) \rightarrow \neg_c \alpha)$$

Essa leitura nos permite comparar as três formas de *reductio* apresentadas até aqui:

(1) **Clássica:**[93] $(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow ((\alpha \rightarrow \neg_c \beta) \rightarrow \neg_c \alpha)$

(2) **Paraconsistente:**[94] $(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow ((\alpha \rightarrow \neg_c \beta) \rightarrow \neg_p \alpha)$

(3) **Paracompleta:**[95] $(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow ((\alpha \rightarrow \neg_q \beta) \rightarrow \neg_c \alpha)$

E essa comparação nos será importante com o trabalho que à frente desenvolveremos.

5.4.4. A Semântica da Negação Paracompleta

Não desenvolveremos toda a semântica para $\mathscr{P}_1$ aqui. Todavia, existem alguns aspectos semânticos da negação paracompleta que precisam ser levados em consideração. Como vimos para $\mathcal{LPC}$, a função-valoração da negação clássica é definida como (1):

$$v(\neg_c \alpha) = 1 \Leftrightarrow v(\alpha) = 0$$

E, como vimos para $\mathscr{C}_1$, a função-valoração da negação paraconsistente é definida como (2):

$$v(\neg_p \alpha) = 0 \Rightarrow v(\alpha) = 1$$

[93] Visto na página 72.
[94] Visto na página 80.
[95] Visto na página 87.

A definição (1) coaduna com o fato de que essa negação satisfaz tanto o PNC quanto o PTE. Por outro lado, a definição (2) coaduna com o fato de que essa negação satisfaz o PTE, mas não o PNC. No entanto, como também vimos, no caso das fórmulas *bem comportadas* do cálculo paraconsistente, o PNC vale. Precisamos então oferecer uma valoração para a negação paracompleta que permita que tal negação satisfaça o PNC, mas não o PTE. Tal definição deve também permitir que, para algumas fórmulas do cálculo paracompleto (*viz.*, as fórmulas bem comportadas) satisfaçam o PTE.

Uma vez que não obtemos $\alpha \vee \neg_q \alpha$ como teorema, e como a função-valoração da disjunção é a mesma,[96] nos casos nos quais $\alpha \vee \neg_q \alpha$ não é obtido é um caso no qual tanto α quanto $\neg_q \alpha$ tem valor *falso*. Isto é, será um caso que $v(\alpha) = v(\neg_q \alpha) = 0$. Todavia, uma vez que vale o PNC (visto o axioma $\mathscr{P}13$), não podemos obter uma situação na qual tanto α quanto $\neg_q \alpha$ sejam tomados como *verdadeiros*. Portanto, as duas fórmulas (a fórmula e sua negação paracompleta) podem ser falsas ao mesmo tempo, mas não verdadeiras ao mesmo tempo. Podemos então definir uma valoração para a negação paracompleta do seguinte modo:

(3) Se $v(\neg_q \alpha) = 1$, então $v(\alpha) = 0$

O que se segue:

(3.1) Se $v(\alpha) = 1$, então $v(\neg_q \alpha) = 0$

A semântica valorativa para $\mathscr{P}_1$ foi oferecida em Loparić e da Costa (1984), sendo a função-valoração definida como:

Definição 7 (Valoração para $\mathscr{P}_1$ (A. Loparic))**.** Uma valoração para $\mathscr{P}_1$ é um mapeamento $v : \mathfrak{F} \longrightarrow \{1, 0\}$ sendo $\mathfrak{F}$ o conjunto de fórmulas de $\mathscr{P}_1$ e $\{1, 0\}$ o conjunto de valores-de-verdade, onde 1 é valor designado e 0 valor não-designado, tal que:

(0) $v(\alpha) = 1 \Leftrightarrow v(\alpha) \neq 0$

(1) $v(\alpha) = 1 \Rightarrow v(\neg_q \alpha) = 0$

(2) $v(\alpha) \neq v(\neg_q \alpha) \Rightarrow v(\neg_q \alpha) \neq v(\neg_q \neg_q \alpha)$

(3) Se $v(\alpha) \neq v(\neg_q \alpha)$ e $v(\beta) \neq v(\neg_q \beta)$, então $v(\alpha \rightarrow \beta) \neq v(\neg_q(\alpha \rightarrow \beta))$, $v(\alpha \wedge \beta) \neq v(\neg_q(\alpha \wedge \beta))$ e $v(\alpha \vee \beta) \neq v(\neg_q(\alpha \vee \beta))$

(4) $v(\neg_q(\alpha \wedge \neg_q \alpha)) = 1$

A partir dessa valoração, obtemos que $\mathscr{P}_1$ é decidível pelo método de valoração e há um tableux semântico e decidível por esse método.[97]

[96] Isto é, $v(\alpha \vee \beta) = 1$ sse $v(\alpha) = 1$ ou $v(\beta) = 1$.

[97] *Cf.* Loparić e da Costa (1984) e Marconi (1980).

Com essa definição para a função-valoração para $\mathscr{P}_1$, provamos que tanto o PNC quanto o *Ex Falso* são tautologias, mas não o PTE.

Teorema 10.

(PNC) $\vDash_{P_1} \neg_q(\alpha \wedge \neg_q\alpha)$

(EF) $\vDash_{P_1} \alpha \rightarrow (\neg_q\alpha \rightarrow \beta)$

(PTE) $\nvDash_{P_1} \alpha \vee \neg_q\alpha$

Demonstração. Fica como exercício para o leitor. □

Sabemos que se uma fórmula é bem comportada ($\alpha^\bullet$), então ela satisfaz o PTE. A essas fórmulas obtemos resultados importantes:

Teorema 11.

(1) $\alpha^\bullet \vDash_{P_1} \alpha \vee \neg_q\alpha$

(2) $\alpha^\bullet, \beta^\bullet \vDash_{P_1} \neg_q(\alpha \vee \beta) \leftrightarrow (\neg_q\alpha \wedge \neg_q\beta)$

(3) $\alpha^\bullet, \beta^\bullet \vDash_{P_1} \neg_q(\alpha \wedge \beta) \leftrightarrow (\neg_q\alpha \vee \neg_q\beta)$

(4) $\alpha^\bullet \vDash_{P_1} \neg_q\neg_q\alpha \rightarrow \alpha$

(5) $\alpha^\bullet, \beta^\bullet \vDash_{P_1} (\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\neg_q\beta \rightarrow \neg_q\alpha)$

Demonstração. Fica como exercício par ao leitor. □

Outro resultado interessante é que a versão do Teorema de Arruda (Teo. 6) para o cálculo paracompleto não é uma tautologia de $\mathscr{P}_1$.

Teorema 12 (A. I. Arruda II)**.** $\nvDash_{P_1} \alpha^{\bullet\bullet}$

Demonstração. Sabemos que a fórmula $\alpha^{\bullet\bullet}$ significa $\alpha^\bullet \vee \neg_q\alpha^\bullet$, sendo equivalente à $(\alpha \vee \neg_q\alpha) \vee \neg_q(\alpha \vee \neg_q\alpha)$. Suponha que $v(\alpha^{\bullet\bullet}) = 0$, isto é, (a) $v((\alpha \vee \neg_q\alpha) \vee \neg_q(\alpha \vee \neg_q\alpha)) = 0$. De (a) obtemos que (a.1) $v(\alpha \vee \neg_q\alpha) = 0$ e (a.2) $v(\neg_q(\alpha \vee \neg_q\alpha)) = 0$. De (a.1) obtemos (a.1.1) $v(\alpha) = 0$ e (a.1.2) $v(\neg_q\alpha) = 0$. Note, contudo, que não podemos aplicar mais nenhuma das cláusulas da Def. 7 e, deste modo, não obtemos qualquer contradição semântica. Portanto, a fórmula $(\alpha \vee \neg_q\alpha) \vee \neg_q(\alpha \vee \neg_q\alpha))$ não é um teorema de $\mathscr{P}_1$. □

5.5. Lógica Não-Alética

Após observarmos os cálculos paraconsistentes e paracompletos, que permitem introduzirmos a negação clássica através dos operadores de *bom comportamento*, percebemos que cada um desses sistemas, de modo independente, contêm a Lógica Clássica. Podemos então propor uma nova pergunta:

Poderia haver um sistema no qual podemos obter as três negações vistas até agora (*viz.*, negação clássica, paraconsistente e paracompleta)?

Se sim, como seus conectivos, principalmente a *negação* (ou as *negações*), funcionariam? Quais seriam os princípios clássicos que seriam satisfeitos, quais não seriam e em quais circunstâncias? Teríamos o *Ex Falso* como teorema? E o PTE? Semanticamente, como a(s) negação(ões) desse sistema se comportaria(m)? Ou melhor, haveria apenas *uma* negação que teria um comportamento diferente de acordo com cada fórmula ou, de outro modo, teríamos três negações independentes? Poderíamos compreender as relações entre os diferentes tipos de negação? da Costa (1989) desenvolveu uma hierarquia de cálculos que chamou de "*Não-Aléticos*" ($\mathscr{N}_n$ $(0 \leq n \leq \omega)$) que seriam tratados tanto como paraconsistentes quanto paracompletos (e que seria também obteria a Lógica Clássica). Vejamos suas principais características.[98]

5.5.1. Os Cálculos $\mathscr{N}_n$ $(0 \leq n \leq \omega)$

A ideia geral da Lógica Não-Alética, como visto, é obter um sistema que permita tanto casos de paraconsistência quanto de paracompletude sem que, com isso, se perca a lógica clássica. No entanto, como vimos nas seções anteriores, essas características implicam em propriedades sintáticas importantes. Se desejamos permitir paraconsistência, então o PNC não pode vigorar para toda fórmula; por outro lado, se desejamos permitir paracompletude, então o PTE que não pode vigorar para toda fórmula. Além do mais, se há paraconsistência, então o sistema é *paraconsistente* e não-trivial; e, por outro lado, se há paracompletude, o sistema não preserva o PTE. Como podemos então introduzir tanto paraconsistência e paracompletude de modo que nos seja permissível obter, posteriormente, fórmulas ditas *clássicas*?

Vamos apresentar aqui o sistema $\mathbb{N}_1$, começando por sua linguagem. Seja $\mathcal{P}$ um conjunto não-vazio, denumerável, de *variáveis proposicionais* e $\mathcal{F}$ o conjunto de *Fórmulas* de $\mathbb{N}_1$, definido indutivamente tal como se segue:

$$\alpha \stackrel{\text{def}}{=} p_i \,|\, \neg_n \alpha \,|\, \alpha \rightarrow \beta \,|\, \alpha \wedge \beta \,|\, \alpha \vee \beta \,|$$

onde $p_i \in \mathcal{P}$ e i é um número natural; α e β são fórmulas; e os símbolos $\neg_q$, $\rightarrow$, $\wedge$ e $\vee$ denotam os conectivos (primitivos) da negação não-alética, implicação material, conjunção e disjunção, respectivamente. A bicondicional é definida usualmente. Antes de apresentarmos os postulados de $\mathbb{N}_1$ precisamos definir *dois* operadores de *bom comportamento*.[99]

[98] Note que da Costa (1989) desenvolveu não apenas *um* cálculo proposicional não-alético, mas sim uma *hierarquia* de cálculos proposicionais. Ao nos referirmos ao cálculo proposicional não-alético, nos restringiremos ao cálculo $\mathbb{N}_1$ dessa hierarquia. Devemos notar que, nos cálculos $\mathscr{N}_n$ $(0 \leq n \leq \omega)$, a negação não-alética é um conectivo primitivo da linguagem. Esses e outros detalhes podem ser visto com cuidado em da Costa (1989), Grana (2007) ou Grana (1990a).

[99] Assumiremos aqui diversas outras definições prévias que devem ser feitas como, por exemplo,

Definição 8 (Operadores de Bom Comportamento em $\mathbb{N}_1$)**.**

$$\alpha^{\circ} \stackrel{\text{def}}{=} \neg_n(\alpha \wedge \neg_n\alpha)$$

$$\alpha^{\bullet} \stackrel{\text{def}}{=} \alpha \vee \neg_n\alpha$$

Chamaremos o operador $^{\circ}$ de "bom comportamento paraconsistente" (ou "bola aberta") e o operador $^{\bullet}$ de "bom comportamento paracompleto" (ou "bola fechada").

Podemos reparar que introduzimos na definição 8 os operadores de bom comportamento da lógica paraconsistente (Def. 2, p. 77) e da lógica paracompleta (Def. 5, p. 84). Vejamos agora os postulados d $\mathbb{N}_1$.

Postulados 4 (Cálculo $\mathbb{N}_1$)**.**

$\mathbb{N}1$ $(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow ((\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma))$

$\mathbb{N}2$ $\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)$

$\mathbb{N}3$ $\alpha, \alpha \rightarrow \beta / \beta$

$\mathbb{N}4$ $((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha$

$\mathbb{N}5$ $(\alpha \wedge \beta) \rightarrow \alpha$

$\mathbb{N}6$ $(\alpha \wedge \beta) \rightarrow \beta$

$\mathbb{N}7$ $\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow (\alpha \wedge \beta))$

$\mathbb{N}8$ $\alpha \rightarrow (\alpha \vee \beta)$

$\mathbb{N}9$ $\beta \rightarrow (\alpha \vee \beta)$

$\mathbb{N}10$ $(\alpha \rightarrow \gamma) \rightarrow ((\beta \rightarrow \gamma) \rightarrow ((\alpha \vee \beta) \rightarrow \gamma))$

$\mathbb{N}11$ $\alpha^{\bullet} \wedge \beta^{\circ} \rightarrow ((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow ((\alpha \rightarrow \neg_n\beta) \rightarrow \neg_n\alpha))$

$\mathbb{N}12$ $(\alpha^{\bullet} \wedge \beta^{\bullet}) \rightarrow ((\alpha \rightarrow \beta)^{\bullet} \wedge (\alpha \wedge \beta)^{\bullet} \wedge (\alpha \vee \beta)^{\bullet}) \wedge (\neg_n\alpha)^{\bullet})$

$\mathbb{N}13$ $(\alpha^{\circ} \wedge \beta^{\circ}) \rightarrow ((\alpha \rightarrow \beta)^{\circ} \wedge (\alpha \wedge \beta)^{\circ} \wedge (\alpha \vee \beta)^{\circ}) \wedge (\neg_n\alpha)^{\circ})$

$\mathbb{N}14$ $\alpha^{\circ} \rightarrow ((\alpha \rightarrow \neg_n\neg_n\alpha) \wedge (\alpha \rightarrow (\neg_n\alpha \rightarrow \beta)))$

$\mathbb{N}15$ $\alpha^{\bullet} \rightarrow (\neg_n\neg_n\alpha \rightarrow \alpha)$

$\mathbb{N}16$ $\alpha^{\circ} \vee \alpha^{\bullet}$

Note que $\mathbb{N}_1$ não tem como axioma *nem* o PNC e *nem* o PTE. Esse sistema, *prima facie*, é tanto paraconsistente quanto paracompleto.

a noção de consequência sintática e semântica. Para mais, ver da Costa (1989); Grana (2007) ou Grana (1990a).

5.5.2. A Negação Não-Alética e as Negações Aléticas

O cálculo $\mathbb{N}_1$ tem como característica, como podemos ver em seus postulados, introduzir apenas *um* conectivo de negação. Através dele podemos obter, através dos *bons comportamentos* das fórmulas, a negação clássica, a paraconsistente e a paracompleta. Dado o axioma $\mathbb{N}16$, sabemos que ou uma fórmula é *bem comportada* no sentido paraconsistente, ou ela é *bem comportada* no sentido paracompleto. Isso impede, portanto, uma fórmula ser *mal comportada* em ambos os sentidos. Visto isso, podemos obter três casos: (1) ser bem comportada no sentido paraconsistente, mas ser má comportada no sentido paracompleto – ou seja, a fórmula satisfaz o PNC, mas não satisfaz o PTE; (2) ser bem comportada no sentido paracompleto, mas ser má comportada no sentido paraconsistente – ou seja, a fórmula satisfaz o PTE, mas não satisfaz o PNC; e, por fim, (3) ser bem comportada em ambos os sentidos – satisfazendo assim tanto o PNC quanto o PTE – posto que a disjunção é inclusiva. Através desses três casos nós podemos definir as negações paraconsistente, paracompleta e clássica:

Definição 9 (Negações Aléticas em $\mathbb{N}_1$)**.**

(1) Negação Paraconsistente: $\neg_p\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \neg_n(\alpha^\circ) \wedge (\alpha^\bullet \wedge \neg_n\alpha)$

(2) Negação Paracompleta: $\neg_q\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \neg_n(\alpha^\bullet) \wedge (\alpha^\circ \wedge \neg_n\alpha)$

(3) Negação Clássica: $\neg_c\alpha \stackrel{\text{def}}{=} (\alpha^\bullet \wedge \alpha^\circ) \wedge \neg_n\alpha$

Apenas para estabelecermos uma terminologia, em $\mathscr{N}_n$ $(0 \leq n \leq \omega)$, chamaremos uma fórmula de

> *Fórmula Clássica* se a fórmula satisfaz tanto o PTE quanto o PNC (*i.e.*, se a fórmula for bem comportada no sentido paracompleto e paraconsistente)
>
> *Fórmula Paraconsistente*: se a fórmula satisfizer o PTE, mas não satisfizer o PNC (*i.e.*, é bem comportada no sentido paracompleto, mas não no sentido paraconsistente)
>
> *Fórmula Paracompleta*: se a fórmula satisfizer o PNC, mas não satisfizer o PTE (*i.e.*, é bem comportada no sentido paraconsistente, mas não no sentido paracompleto)

Através das características apresentadas acima nós obtemos metateoremas importantes quanto ao cálculo $\mathbb{N}_1$:

Teorema 13. Adicionar o PTE à $\mathbb{N}_1$, *i.e.*, o esquema $\alpha \vee \neg_n\alpha$, obtemos o cálculo paraconsistente $\mathscr{C}_1$.

Demonstração. Em da Costa (1989, p.30). □

Teorema 14. Adicionar o PNC à $\mathbb{N}_1$, *i.e.*, o esquema $\neg_n(\alpha \wedge \neg_n\alpha)$, obtemos o cálculo paracompleto $\mathscr{P}_1$

Demonstração. Em da Costa (1989, p.30). □

Teorema 15. Se adicionar tanto o PNC como do PTE como esquemas de $\mathbb{N}_1$ nós obtemos $\mathcal{LPC}$.

Demonstração. Em da Costa (1989, p.30). □

Outro aspecto importante que temos de ressaltar, que diz respeito aos operadores de bom comportamento do cálculo $\mathbb{N}_1$, é evidenciado por uma variação do teorema 2 (p. 79) e 5 (p. 86) para $\mathscr{C}_1$ e $\mathscr{P}_1$, respectivamente:

Corolário 7. Em $\mathbb{N}_1$, temos que:

(a) $\vdash_{N_1} \alpha^\bullet \rightarrow (\neg_n \alpha)^\bullet$

(b) $\vdash_{N_1} \alpha^\circ \rightarrow (\neg_n \alpha)^\circ$

(c) $\vdash_{N_1} (\alpha^\circ \wedge \alpha^\bullet) \rightarrow ((\neg_n \alpha)^\circ \wedge (\neg_n \alpha)^\bullet)$

Isto é, em (a) obtemos que, se α é uma fórmula paraconsistente, então $\neg_n \alpha$ será uma fórmula paraconsistente; em (b) obtemos que, se α é uma fórmula paracompleta, então $\neg_n \alpha$ será uma fórmula paracompleta; e, por fim, em (c) obtemos que, se α é uma fórmula clássica, então $\neg_n \alpha$ será uma fórmula clássica.

Demonstração. (a) é obtido diretamente pelo postulado $\mathbb{N}12$; (b) é obtido diretamente pelo postulado $\mathbb{N}13$; e (c) é obtido pela aplicação direta tanto de $\mathbb{N}12$ quanto $\mathbb{N}13$. □

Para o corolário seguinte, utilizaremos a expressão $\neg_n^1 ... \neg_n^n \alpha$ para denotar uma fórmula (finita) com n reiterações da negação não-alética.

Corolário 8. Em $\mathbb{N}_1$, temos que:

(a) $\vdash_{N_1} \alpha^\bullet \rightarrow (\neg_n^1 ... \neg_n^n \alpha)^\bullet$

(b) $\vdash_{N_1} \alpha^\circ \rightarrow (\neg_n^1 ... \neg_n^n \alpha)^\circ$

(c) $\vdash_{N_1} (\alpha^\circ \wedge \alpha^\bullet) \rightarrow ((\neg_n^1 ... \neg_n^n \alpha)^\circ \wedge (\neg_n^1 ... \neg_n^n \alpha)^\bullet)$

Isto é, em (a) obtemos que, se α é uma fórmula paraconsistente, então seja *n* o número de ocorrências de negação não-alética ligadas à α (*i.e.*, $\neg_n^1 ... \neg_n^n$) a fórmula resultante $\neg_n^1 ... \neg_n^n \alpha$ será uma fórmula paraconsistente; do mesmo modo, em (b) obtemos que, se α é uma fórmula paracompleta, então $\neg_n^1 ... \neg_n^n \alpha$ será uma fórmula paracompleta; e, por fim, em (c) obtemos que, se α é uma fórmula clássica, então $\neg_n^1 ... \neg_n^n \alpha$ será uma fórmula clássica.

Demonstração. Será obtido utilizando o mesmo método dos corolários do teoremas 2 (p. 79) e 5 (p. 86), mas aplicando tal método sobre os resultados do teorema 7 (p. 93). □

5.5.3. *Reductio* Não-Alético, Paracompleto, Paraconsistente e Clássico

O axioma $\mathbb{N}11$ introduz o que chamaremos de "Redução ao Absurdo Não-Alética". Esse axioma nos diz que, se uma fórmula α for paracompletamente bem comportada (ou seja, que satisfaça o PTE) implique na contradição de uma fórmula β paraconsistentemente bem comportada (ou seja, que satisfaça o PNC), então isso implica que $\neg_n\alpha$ – *i.e.*, introduzimos a negação alética de α.

Tal como fizemos nas sessões anteriores, e dada a definição das negações aléticas em termos da negação não-alética (Def. 9), podemos tentar compreender (de alguns modos diferentes) o axioma $\mathbb{N}11$

$$\alpha^\bullet \wedge \beta^\circ \rightarrow ((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow ((\alpha \rightarrow \neg_n\beta) \rightarrow \neg_n\alpha))$$

Dada a definição 9 (p. 92), se uma fórmula é bola aberta (bem comportada no sentido paraconsistente), então ela *ou* é uma fórmula paracompleta, *ou* é uma fórmula clássica (no caso de ser também bola fechada, *i.e.*, bem comportada no sentido paracompleto). Por outro lado, se uma fórmula é bola fechada, então *ou* ela é uma fórmula paraconsistente, *ou* é uma fórmula clássica (no caso de ser bola aberta também). Portanto, se obtivermos apenas que ela é *bem comportada* de um modo específico, não podemos decidir qual a natureza da sua negação até sabermos se ela é ou não má comportada no outro sentido. Disso se segue *quatro* interpretações diferentes do axioma $\mathbb{N}11$.

(I) $\neg_n(\alpha^\circ) \wedge \alpha^\bullet, \neg_n(\beta^\bullet) \wedge \beta^\circ \vdash_{N_1} ((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow ((\alpha \rightarrow \neg_q\beta) \rightarrow \neg_p\alpha))$

(II) $\alpha^\circ \wedge \alpha^\bullet, \neg_n(\beta^\bullet) \wedge \beta^\circ \vdash_{N_1} ((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow ((\alpha \rightarrow \neg_q\beta) \rightarrow \neg_c\alpha))$

(III) $\neg_n(\alpha^\circ) \wedge \alpha^\bullet, \beta^\bullet \wedge \beta^\circ \vdash_{N_1} ((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow ((\alpha \rightarrow \neg_c\beta) \rightarrow \neg_p\alpha))$

(IV) $\alpha^\circ \wedge \alpha^\bullet, \beta^\bullet \wedge \beta^\circ \vdash_{N_1} ((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow ((\alpha \rightarrow \neg_c\beta) \rightarrow \neg_c\alpha))$

Em (I) temos uma situação na qual a fórmula α é má comportada paraconsistentemente (ou seja, não satisfaz o PNC), mas é bem comportada no sentido paracompleto (ou seja, satisfaz o PTE) e, por outro lado, a fórmula β é bem comportada paraconsistentemente, mas má comportada no sentido paracompleto. Assim, sabemos que qualquer negação de α se comportará como a negação paraconsistente e qualquer negação de β será paracompleta (dada a definição 9).

Em (II) temos um caso no qual α é bem comportada nos dois sentidos, mas β continua sendo má comportada no sentido paracompleto. Desse modo, a negação de α se comportará como clássica e, ainda, a negação de β será paracompleta.

Em (III) obtemos o inverso, sendo α má comportada no sentido paraconsistente e bem comportada no sentido paracompleto, enquanto que β é bem comportada nos dois sentidos. Portanto, qualquer negação de α se comportará como uma negação paraconsistente, enquanto que as negações de β serão clássicas.

Por fim, em (IV) tanto α quanto β satisfazem o bom comportamento paraconsistente e o bom comportamento paracompleto, o que segue que qualquer negação de α ou de β se comportará como a negação clássica.

Essas quatro situações são importantes, pois podemos compreendê-los intuitivamente (dada a definição 9 das negações aléticas) do seguinte modo:

(I) $((\alpha \to \beta) \to ((\alpha \to \neg_q \beta) \to \neg_p \alpha))$

(II) $((\alpha \to \beta) \to ((\alpha \to \neg_q \beta) \to \neg_c \alpha))$

(III) $((\alpha \to \beta) \to ((\alpha \to \neg_c \beta) \to \neg_p \alpha))$

(IV) $((\alpha \to \beta) \to ((\alpha \to \neg_c \beta) \to \neg_c \alpha))$

Agora note que em $\mathscr{C}_1$, dado que todas as fórmulas satisfazem o PTE, se ela satisfaz o PNC (*i.e.*, satisfaz o operador bola aberta), então ela é clássica. Assim, a Redução ao Absurdo obtida em (III) é equivalente à Redução ao Absurdo Paraconsistente. Por outro lado, em $\mathscr{P}_1$, dado que todas as fórmulas satisfazem o PNC, se ela satisfaz o PTE (*i.e.*, satisfaz o operador bola fechada), então ela é clássica. Desse modo, a Redução ao Absurdo obtida em (II) é equivalente à Redução ao Absurdo Paracompleta. E, por fim, como todas as fórmulas de $\mathcal{LPC}$ satisfazem o PTE e o PNC (*i.e.*, satisfazem tanto o operador bola aberto quanto o operador bola fechada), segue que a Redução ao Absurdo obtida em (IV) é equivalente à Redução ao Absurdo Clássica. O que obtemos de diferente nessa análise, como podemos ver, é o caso (I), que chamaremos de "Redução ao Absurdo Não-Alética" (haja visto o sistema que estamos trabalhando).[100]

5.5.4. A Semântica da Negação Não-Alética

Não desenvolveremos toda a semântica de $\mathscr{N}_n$ $(0 \leq n \leq \omega)$ aqui. Todavia, existem alguns aspectos semânticos da negação não-alética que precisam ser levados em consideração. Como vimos para $\mathcal{LPC}$, a valoração para a negação clássica é definida como (1):

$$v(\neg_c \alpha) = 1 \Leftrightarrow v(\alpha) = 0$$

Já para $\mathscr{C}_1$, a valoração para a negação paraconsistente é definida como (2):

$$v(\neg_p \alpha) = 0 \Rightarrow v(\alpha) = 1$$

E, como visto para $\mathscr{P}_1$, a valoração para a negação paracompleta é definida como (3)

$$v(\neg_q \alpha) = 1 \Rightarrow v(\alpha) = 0$$

[100] Devemos notar que a *Redução ao Absurdo Não-Alética* parece caracterizar uma noção *minimal* de Redução ao Absurdo: se fórmula α satisfaz o PTE e implica em uma fórmula β, que satisfaz o PNC, como também implica na negação de β, então obtemos a negação de α.

No entanto, a negação não-alética não tem significado independente da *natureza* da fórmula – *i.e.*, a negação não-alética, $\neg_n$, ao ser ligada em uma fórmula qualquer α, não terá significado a não ser que α seja uma fórmula paraconsistente, paracompleta ou clássica. Sendo assim, não podemos definir a função-valoração da negação não-alética sem apelarmos para o comportamento da fórmula que está a ela ligada. Em da Costa (1989, p.31), é oferecida uma valoração para $\mathbb{N}_1$ como se segue.

Definição 10 (Valoração de $\mathbb{N}_1$)**.** Uma valoração para $\mathbb{N}_1$ é um mapeamento $v : \mathfrak{F} \longrightarrow \{1, 0\}$, sendo $\mathfrak{F}$ o conjunto de fórmulas de $\mathbb{N}_1$ e $\{1, 0\}$ o conjunto de valores-de-verdade, onde 1 é valor designado e 0 valor não-designado, tal que:

(1) Se α é um axioma de $\mathbb{N}_1$, então $v(\alpha) = 1$

(2) Se $v(\alpha) = v(\alpha \rightarrow \beta) = 1$, então $v(\beta) = 1$

(3) Existe ao menos uma fórmula β tal que $v(\beta) = 0$

Contudo, note que não há uma definição explícita para a negação não-alética. No entanto, de acordo com o que vimos, podemos definir a função-valoração para a negação não-alética do seguinte modo:[101]

Definição 11 (Valoração da Negação de $\mathbb{N}_1$)**.**

(4) Se $v(\alpha^\circ) = v(\alpha^\bullet) = 1$, então $v(\neg_n\alpha) = 1 \Leftrightarrow v(\alpha) = 0$

(5) Se $v(\alpha^\circ) = 1$ e $v(\alpha^\bullet) = 0$, então $v(\neg_n\alpha) = 0 \Rightarrow v(\alpha) = 1$

(6) Se $v(\alpha^\circ) = 0$ e $v(\alpha^\bullet) = 1$, então $v(\neg_n\alpha) = 1 \Rightarrow v(\alpha) = 0$

Repare que tivemos que impôr como condição para valorarmos a negação não-alética que tenhamos, como antecedente, a valoração do comportamento da fórmula a qual a negação está conectada. Sem isso, *i.e.*, se obtermos apenas o valor-de-verdade da fórmula α, não é possível caracterizar semanticamente a negação não-alética de α.

5.6. Quadro Comparativo

Vejamos um panorama das propriedades que os sistemas apresentados anteriormente preservam (ou não):

- **Consistências e Trivialidade:**

  $\mathcal{LPC}$: Consistente e Não-Trivial

  $\mathscr{C}_1$: *Paraconsistente* e Não-trivial

[101] Note que a definição a seguir é oferecida por nós, não sendo ela encontrada na literatura.

$\mathscr{P}_1$: Consistente, Não-trivial

$\mathbb{N}_1$: *Paraconsistente* e Não-trivial

- **Princípio da Identidade, Terceiro Excluído e Não-Contradição:**

  $\mathcal{LPC}$: Satisfaz Identidade, Não-Contradição e Terceiro Excluído

  $\mathscr{C}_1$: Satisfaz Identidade e Terceiro Excluído, mas não satisfaz a Não-Contradição

  $\mathscr{P}_1$: Satisfaz Identidade e Não-Contradição, mas não satisfaz o Terceiro Excluído

  $\mathbb{N}_1$: Satisfaz Identidade, mas não satisfaz Terceiro Excluído e Não-Contradição

- ***Ex Falso* e *Terceiro Excluído*:**

  $\mathcal{LPC}$: Ambos são teoremas

  $\mathscr{C}_1$: Terceiro Excluído é teorema, mas não *Ex Falso* (que só vale para as fórmulas que são "bola aberta")

  $\mathscr{P}_1$: *Ex Falso* é teorema, mas não Terceiro Excluído (que só vale para as fórmulas que são "bola fechada")

  $\mathbb{N}_1$: Nenhum é teorema em geral, mas *Ex Falso* é teorema para as fórmulas que são "bola aberta" e Terceiro Excluído é teorema para as fórmulas que são "bola fechada"

- **Semântica da Negação:**

  $\mathcal{LPC}$: $v(\neg_c \alpha) = 1 \Leftrightarrow v(\alpha) = 0$

  $\mathscr{C}_1$: $v(\neg_p \alpha) = 0 \Rightarrow v(\alpha) = 1$

  $\mathscr{P}_1$: $v(\neg_q \alpha) = 1 \Rightarrow v(\alpha) = 0$

  $\mathbb{N}_1$: Não é caracterizada de modo independente da fórmula a qual está ligada, dependendo assim do comportamento desta fórmula

- **Fórmulas Bem Comportadas e Negação Forte:**

$\mathcal{LPC}$: Não é definido operador de bom comportamento, uma vez que todas as fórmulas de $\mathcal{LPC}$ seriam bem comportadas tanto no sentido paraconsistente quanto no sentido paracompleto

$\mathscr{C}_1$: Se uma fórmula é bem comportada no sentido paraconsistente (α°), então a negação dessa fórmula (*i.e.*, negação [paraconsistente] forte) preserva as propriedades da negação clássica

$\mathscr{P}_1$: Se uma fórmula é bem comportada no sentido paracompleto ($\alpha^\bullet$), então a negação dessa fórmula (*i.e.*, negação [paracompleta] forte) preserva as propriedades da negação clássica

$\mathbb{N}_1$: A negação de uma fórmula bem comportada no sentido paraconsistente (α°) e é uma negação paracompleta ou clássica; A negação de uma fórmula bem comportada no sentido paracompleto ($\alpha^\bullet$) é uma negação paraconsistente ou clássica; por fim, a negação de uma fórmula bem comportada tanto no sentido paraconsistente como no sentido paracompleto preserva as propriedades da negação clássica

- **Reiteração de Negações em Fórmulas Bem Comportadas:**

$\mathcal{LPC}$: Como não há operadores de bom comportamento, as ocorrências de *n* negações em uma fórmula clássica serão, todas, negações clássicas

$\mathscr{C}_1$: Se uma fórmula for bem comportada, então todas as negações paraconsistentes conectadas a ela (independente do número) serão negações [paraconsistentes] fortes – Teo. 2

$\mathscr{P}_1$: Se uma fórmula for bem comportada, então todas as negações paracompletas conectadas a ela (independente do número) serão negações [paracompletas] fortes – Teo. 5

$\mathbb{N}_1$: Se uma fórmula for (i) paraconsistente (ii) paracompleta ou (iii) clássica, então todas negações não-aléticas conectadas a ela (independente do número) serão negações (i) paraconsistentes (ii) paracompletas ou (iii) clássicas – Teo. 7

Tendo em vista essas propriedades gerais que cada sistema apresentado preserva (ou não), podemos observar que parte crucial desses sistemas depende do modo como a *negação* funciona (atrelado, obviamente, ao bom ou mau comportamento das fórmulas que a negação está conectada). No entanto, as quatro negações discutidas (clássica, paraconsistente, paracompleta e não-alética) preservam propriedades diferentes umas das outras. Poderíamos nos perguntar: em face a tanta diferença, o que elas preservam em comum para que seja correto chamá-las, todas, de "negações"? Em outras palavras, o que faz delas *negações* ou, de modo

geral, o que torna um conectivo ser uma negação? Para oferecermos uma resposta satisfatória a essa pergunta deveríamos nos adentrar a um trabalho muito maior, envolvendo desde um projeto exegético que remonta aos trabalhos desenvolvido na Grécia Antiga, até mesmo análise do uso de frases negativas em linguagens naturais. Todavia, este não é o foco do presente trabalho. Assumiremos, por enquanto, tal como encontramos na tradição lógico-filosófica, que os referidos conectivos apresentam três *tipos* de negação (ou *modos* de se negar), que podem ser caracterizadas utilizando o famigerado *quadrado das oposições*.[102]

5.7. Negações e o Quadrado das Oposições

O quadrado das oposições remonta originalmente aos trabalhos de Aristóteles,[103] sendo esta uma análise de frases assertivas e suas negações. De modo usual, sua apresentação analisa quatro tipos de expressões:[104]

A Universais Afirmativas: *Todo S é P* ($\forall x(Sx \rightarrow Px)$)

E Universais Negativas: *Nenhum S é P* ($\forall x(Sx \rightarrow \neg Px)$)

I Particulares Afirmativas: *Algum S é P* ($\exists x(Sx \wedge Px)$)

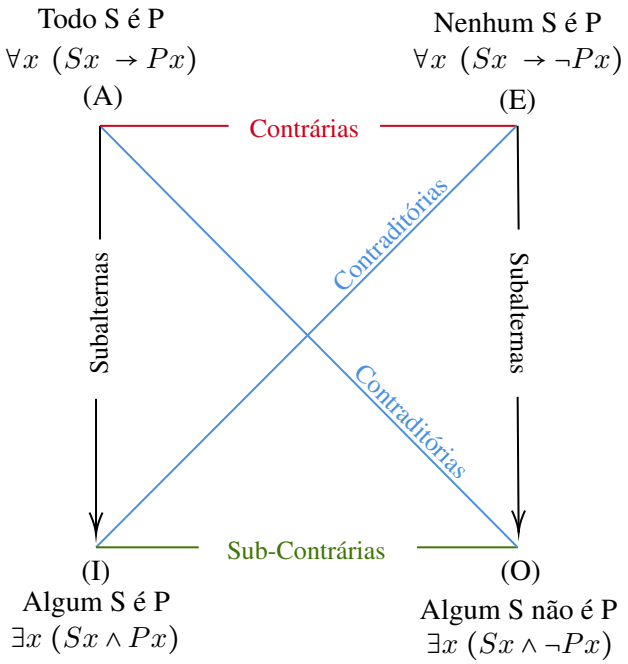
O Particulares Negativas: *Algum S não é P* ($\exists x(Sx \wedge \neg Px)$)

Sendo elas dispostas em um quadrado que as relacionam, cujo diagrama seria representado do seguinte modo:

[102] Note que trataremos das negações clássica, paraconsistente e paracompleta, sendo a quarta negação supracitada, a negação não-alética, um *tipo* de negação (ou modo de se negar) que se comporta de acordo com alguma dessas três negações, como visto.

[103] Cf. Parsons (2017)

[104] Utilizarei aqui fórmulas da lógica clássica de primeira ordem para representar as afirmações analisadas no quadrado de oposição, assumindo que sua sintaxe e semântica sejam conhecidas pelo leitor.

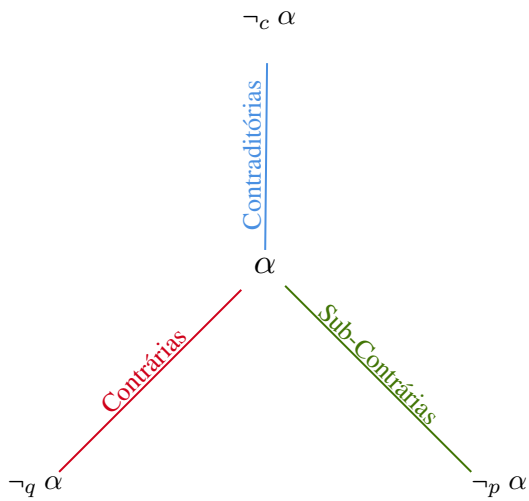


Como podemos facilmente observar, as proposições do tipo (A) Universais Afirmativas e as do tipo (O) Particulares Negativas são contraditórias, do mesmo modo que as proposições do tipo (E) Universais Negativas e as do tipo (I) Particulares Afirmativas. Isto é, as proposições do tipo (A) e (O) não podem (em uma semântica padrão) ter o mesmo valor-de-verdade ao mesmo tempo – *i.e.*, em uma mesma valoração. O mesmo se segue para as proposições do tipo (E) e (I). Por outro lado, as proposições do tipo (A) Universais Afirmativas e as do tipo (E) Universais Negativas são chamadas de contrárias, podendo ser ambas *falsas* ao mesmo tempo, ainda que não possam ser ambas *verdadeiras* ao mesmo tempo. Por fim, as proposições do tipo (I) Particulares Afirmativas e as proposições do tipo (O) Particulares Negativas podem, por outro lado, ser *verdadeiras* ao mesmo tempo, ainda que não possam ser *falsas* ao mesmo tempo.

As relações de contraditoriedade, contrariedade e sub-contradiedade parecem refletir aspectos importantes das três negações que avaliamos.[105] Uma fórmula α e sua negação clássica, $\neg_c\alpha$, parecem refletir uma relação de contradição, posto que α e $\neg_c\alpha$ não podem ter *o mesmo* valor-de-verdade ao mesmo tempo (*i.e.*, em uma mesma valoração). Por outro lado, uma fórmula α e sua negação paracompleta, $\neg_q\alpha$, parecem refletir uma relação de contrariedade, uma vez que α e $\neg_q\alpha$ podem ser falsas ao mesmo tempo, ainda que não verdadeiras. Por fim, uma fórmula α e sua negação paraconsistente, $\neg_p\alpha$, parecem refletir uma relação de sub-contrariedade, visto que α e $\neg_p\alpha$ podem ser verdadeiras ao mesmo tempo, mas não falsas. Poderíamos observar essas relações na seguinte figura:[106]

[105] *Cf.* Slater (1995); Béziau (2003) e Arenhart (2015).

[106] Como destaca Arenhart (2015, p. 528): "[...] this terminology applies when we consider that the



De modo geral, parece que podemos aceitar tal representação para compreendermos as relações de *contrariedade*, *sub-contrariedade* e *contradição* que há entre uma fórmula e os três tipos de negações que vimos. Mas haveria alguma relação de subalternação? Pensemos nas relações semânticas que vimos anteriormente. A negação clássica nos garante que se uma fórmula for verdadeira, sua negação clássica é falsa e, do mesmo modo, se a negação clássica de uma fórmula for verdadeira, então a fórmula é falsa. Por outro lado, se uma fórmula for falsa, sua negação paraconsistente é verdadeira (ou, se a negação paraconsistente de uma fórmula for falsa, então a fórmula é verdadeira). Por fim, se uma fórmula for verdadeira, sua negação paracompleta é falsa (ou, do mesmo modo, se a negação paracompleta de uma fórmula for verdadeira, a fórmula é falsa). Isso é descrito em:

(i) $v(\neg_c\alpha) = 1 \Leftrightarrow v(\alpha) = 0$

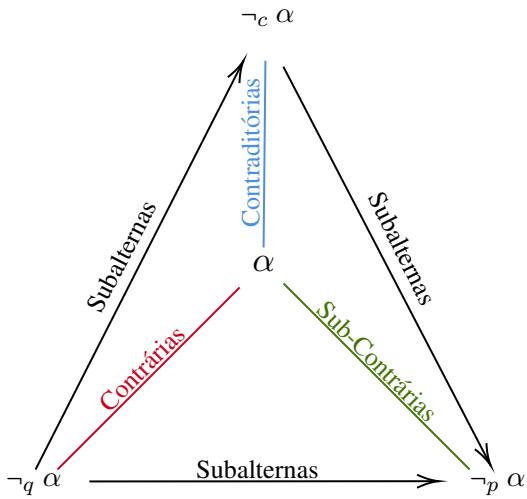
(ii) $v(\neg_p\alpha) = 0 \Rightarrow v(\alpha) = 1$

(iii) $v(\neg_q\alpha) = 1 \Rightarrow v(\alpha) = 0$

Como podemos observar, se $\neg_q\alpha$ é verdadeiro, então α é falso. Se α é falso, então $\neg_c\alpha$ é verdadeiro. Ou seja, $v(\neg_q\alpha) = 1 \Rightarrow v(\neg_c\alpha) = 1$. Temos, portanto, uma relação de subalternação entre a negação paracompleta e a negação clássica. Suponhamos agora que $\neg_c\alpha$ é verdadeira. Disso se segue que α é falso. Como vimos anteriormente, se α é falso, então $\neg_p\alpha$ é verdadeiro. Portanto, temos uma segunda relação de subalternação: $v(\neg_c\alpha) = 1 \Rightarrow v(\neg_p\alpha) = 1$. Por fim, posto

relations of opposition encapsulated by these negations mimic the relations of opposition described in terms of the traditional square". Além disso, outro aspecto importante ressaltado pelo autor é que "[...] the usual procedure in logic texts is to keep calling an expression of the form $[\alpha \wedge \neg_p\alpha]$ a contradiction (it could be called a 'paraconsistent contradiction'), and the same is usually done for paracomplete negation".

que $v(\neg_q \alpha) = 1 \Rightarrow v(\neg_c \alpha) = 1$ e $v(\neg_c \alpha) = 1 \Rightarrow v(\neg_p \alpha) = 1$, disso se segue que: $v(\neg_q \alpha) = 1 \Rightarrow v(\neg_p \alpha) = 1$. Ou seja, obtemos uma terceira relação de subalternação, formando assim o seguinte tetraedro:



Parece apropriado dizer que essas relações entre as três negações fazem sentido. Mas podemos compreendê-las em algum dos sistemas vistos anteriormente? O único sistema lógico que nos permite tratar das *três negações* é o Cálculo Proposicional Não-Alético $\mathcal{N}_n$ $(0 \leq n \leq \omega)$. Deste modo, parece que estamos justificados a nos questionar: podemos compreender essas relações no cálculo $\mathcal{N}_n$? Como foi ressaltado anteriormente, no tocante a reiteração de negações, nos cálculos $\mathcal{N}_n$, se uma fórmula for (i) paraconsistente (ii) paracompleta ou (iii) clássica, então todas negações não-aléticas conectadas a ela (independente do número) serão negações (i) paraconsistentes (ii) paracompletas ou (iii) clássicas – isso por conta do Teorema 7, p. 93. Portanto, se uma fórmula α for bem comportada no sentido paraconsistente (satisfizer o PNC) e no sentido paracompleto (satisfizer o PTE), então toda negação conectada a α será uma negação clássica – independente do número de negações reiteradas. Deste modo, nunca poderemos obter em $\mathcal{N}_n$ uma fórmula como $\neg_c \alpha \rightarrow \neg_p \alpha$ ou, por exemplo, uma fórmula como $\neg_c \neg_p \neg_q \alpha$. Sem essas fórmulas nós não poderíamos compreender relações importantes entre as três negações (que exigiriam estar conectadas a uma mesma fórmula).

Ficamos assim com o seguinte problema: seria possível construir *um* sistema que permita tratar de todas as relações que observamos no tetraedro completo, visto acima? Isto é, haveria algum sistema lógico que figuram as três negações e que permita relacioná-las, mantendo o *espírito* (*i.e.*, as características teóricas e metateóricas que esperamos encontrar) de cada negação? Deixaremos esse problema, por enquanto, aberto para o leitor. Em outros trabalhos ofereceremos sua solução.

Referências Bibliográficas

Arenhart, J. R. B. (2015). Liberating paraconsistency from contradiction. *Logica Universalis*, 9(4):523–544.

Béziau, J.-Y. (2003). New light on the square of oppositions and its nameless corner. *Logical Investigations*, 10(2003):218–232.

Brouwer, L. E. J. (1907). On the foundations of mathematics. In Heyting, A., editor, *Collected works: Philosophy and foundations of mathematics*, pages 11–101. North-Holland Publishing Company Amsterdam. Thesis, Amsterdam; English translation by Heyting: 1975.

Brouwer, L. E. J. (1908). The unreliability of the logical principles. In Heyting, A., editor, *Collected works: Philosophy and foundations of mathematics*, pages 107–111. North-Holland Publishing Company Amsterdam, Amsterdam. English translation by Heyting: 1975.

Carroll, L. (1895). What the tortoise said to achilles. *Mind*, 4(14):278–280.

Church, A. (1996). *Introduction to mathematical logic*, volume 13. Princeton University Press, Princeton.

da Costa, N. C. A. (1963). *Sistemas formais inconsistentes (Inconsistent formal systems, in Portuguese)*. PhD thesis, Habilitation thesis, Universidade Federal do Paraná, Paraná, Brazil, Curitiba.

da Costa, N. C. A. (1989). Logics that are both paraconsistent and paracomplete. *Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti*, 83(1):29–32.

da Costa, N. C. A. e Alves, E. H. (1977). A semantical analysis of the calculi c_n. *Notre Dame J. Formal Logic*, 18(4):621–630.

da Costa, N. C. A., Béziau, J.-Y., e Bueno, O. (1998). *Elementos de teoria paraconsistente de conjuntos*. Centro de Lógica, Epistemologia e História da Ciência, Campinas.

da Costa, N. C. A., Krause, D., e Bueno, O. (2007). Paraconsistent logics and paraconsistency. In Jacquette, D., editor, *Philosophy of Logic*, Handbook of the Philosophy of Science, pages 791 – 911. North-Holland, Amsterdam, 1ed. edition.

da Costa, N. C. A. e Marconi, D. (1986). A note on paracomplete logic. *Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti*, 80(7-12):504–509.

De Carvalho, T. F. e D'Ottaviano, I. M. L. (2005). Sobre o infinitésimo e o cálculo diferencial paraconsistente de da costa. *Revista Eletrônica Informação e Cognição*, 4(1).

Gentzen, G. (1935). Untersuchungen über das logische schließen. i. *Mathematische zeitschrift*, 39(1):176–210.

Gomes, E. e D'Ottaviano, I. M. L. (2017). *Para além das colunas de Hércules: uma história da paraconsistência-De Heráclito a Newton da Costa*. CLE/Unicamp, Campinas, 1 edition.

Grana, N. (1990a). On a minimal non-alethic logic. *Bulletin of the Section of Logic*, 19(1):25–28.

Grana, N. (1990b). *Sulla teoria delle valutazioni di NCA da Costa*. Liguori Editore, Napoli.

Grana, N. (2007). *Dalla logica classica alle logiche non-classiche*. L'orientale ed., Napoli.

Heyting, A. (1956). *Intuitionism: an introduction*. North-Holland Publishing Company, Amsterdam.

Jaskowski, S. (1948). Rachunek zdan dla systemów dedukcyjnych sprzecznych. *Studia Societatis Scientiarum Torunensis, Sectio A*, 1(5):57–77.

Kleene, S. C. (1971). *Introduction to metamathematics*. Wolters-Noordhoff Pub, Groningen.

Kleene, S. C. (2002). *Mathematical logic*. Courier Corporation, Mineola.

Kneale, W. e Kneale, M. (1962). *The development of logic*. Oxford University Press, Oxford.

Kolmogorov, A. (1925). On the principle of excluded middle. In Van Heijenoort, J., editor, *From Frege to Gödel: a source book in mathematical logic, 1879-1931*, volume 9, pages 414–437. Harvard University Press, Cambridge. English translation by van Heijenoort: 1967.

Krause, D. (2002). *Introdução aos fundamentos axiomáticos da ciência*. EPU, São Paulo.

Loparić, A. e da Costa, N. C. A. (1984). Paraconsistency, paracompleteness, and valuations. *Logique et analyse*, 27(106):119–131.

Marconi, D. (1980). A decision method for the calculus c1. In *Proceedings of 3rd Brazilian Conference on Mathematical Logic. São Paulo: Sociedade Brasileira de Lógica*, pages 211–223.

Mendelson, E. (1997). *Introduction to mathematical logic*. Chapman and Hall/CRC, Boca Raton, 4 edition.

Meredith, C. A. (1953). Single axioms for the systems (c, n),(c, o) and (a, n) of the two-valued propositional calculus. *The Journal of Computing Systems*, 1(3):155–164.

Nicod, J. (1917). A reduction in the number of primitive propositions of logic. In *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, volume 19, pages 32–41.

Parsons, T. (2017). The traditional square of opposition. In Zalta, E. N., editor, *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*. Metaphysics Research Lab, Stanford University, summer 2017 edition.

Priest, G. (1979). The logic of paradox. *Journal of Philosophical logic*, 8(1):219–241.

Priest, G. (2008). *An introduction to non-classical logic: From if to is*. Cambridge University Press, Cambridge.

Shoenfield, J. R. (1967). *Mathematical logic*. Addison-Wesley.

Slater, B. H. (1995). Paraconsistent logics? *Journal of Philosophical logic*, 24(4):451–454.

Vasiliev, N. A. (1925). Imaginary (non-aristotelian) logic. In *Atti del V congresso Internazionale di Filosofia*, pages 107–109.