

Demonstração, Tempo e Verdade na Filosofia da Matemática: Uma Perspectiva Fenomenológica

Bruno Rigonato Mundim

Resumo

Conceitos matemáticos são eternos ou se modificam ao longo do tempo? As definições matemáticas, por meio das quais lidamos linguisticamente com esses conceitos, os descrevem ou os criam? Assumindo que a matemática seja uma ciência composta por verdades necessárias, como submeter a verdade de uma proposição à condição empírica e temporal de posse e conhecimento de uma demonstração? Sendo a evidência de uma inferência ratificada por princípios lógicos, como argumentar em defesa desses princípios, uma vez que o princípio em questão pode estar pressuposto na própria argumentação? Tendo como horizonte essas questões, nosso objetivo é propor uma maneira coerente de conciliar a condição contingente e temporal de posse de uma demonstração com o caráter necessário e atemporal do valor de verdade de proposições matemáticas, de modo a resolver alguns dos problemas que se originam da associação que o intuicionismo faz entre demonstração e verdade.

6.1. Introdução

O embate entre platonistas e intuicionistas pode ser abordado a partir da disputa acerca do princípio lógico de bivalência, que diz que uma proposição arbitrária é verdadeira ou falsa. Platonistas o aceitam, intuicionistas o rejeitam. No entanto, para a fenomenologia, princípios lógicos, pela própria condição de princípio, não podem ser justificados, o que de antemão impediria a defesa de uma posição nesse debate. Nesse sentido, o que se pode fazer é uma investigação transcendental que elucide as bases em que um princípio se legitima. Assim, demonstraremos como platonistas e intuicionistas atribuem diferentes sentidos de

ser aos domínios que constituem a referência de enunciados significativos, o que necessariamente condiciona a validade ou não do princípio de bivalência.

A partir disso, a análise fenomenológica do sentido do ser que os intuicionistas atribuem ao domínio de seus enunciados significativos nos permitirá responder uma questão importante que tem sido debatida nas críticas à lógica intuicionista. Para um intuicionista, a menos que tenhamos a posse de uma prova, não podemos considerar que uma proposição matemática possui algum valor de verdade. Nessas condições, uma proposição *se torna* verdadeira a partir do momento em que temos a sua prova em mãos. Mas como conciliar esse aspecto temporal e contingente, que se refere à construção e posse de uma prova, com a necessidade e atemporalidade das verdades matemáticas? Nossa proposta, que assume como modelo a teoria intuicionista de tipos, consistirá em dizer que, ao concebermos o sentido de uma proposição, a priori estabelecemos compatibilidades e incompatibilidades entre tipos, as quais determinam a existência possível de uma prova. Isso implica que toda proposição, independentemente de termos a posse de sua prova, é *possivelmente* verdadeira. Como ficará claro, no entanto, a perspectiva fenomenológica, não obstante elucidar as bases do conflito entre platonistas e intuicionistas, não nos dá condições para eleger uma posição em detrimento de outra, pois, ao invés de justificar se o princípio de bivalência é válido ou não, apenas esclarece as condições que o validam.

O artigo se estrutura da seguinte maneira. No primeiro capítulo, apresentaremos o aparato teórico básico da fenomenologia que diz respeito aos temas que serão investigados. Após analisarmos a incompatibilidade entre realismo e idealismo (ou antirrealismo) matemáticos, apresentaremos o idealismo fenomenológico transcendental, com o intuito de demonstrar sua compatibilidade com uma certa perspectiva realista. Nesse caso, trata-se de um realismo não ingênuo, em que se pode falar de objetos mentalmente independentes, mas cuja existência não prescinde de um sentido constituído por uma experiência da consciência.

No segundo capítulo, trataremos das divergências entre platonistas e intuicionistas e de como ela se caracteriza a partir de uma análise da validade do princípio de bivalência. Veremos que é a intencionalidade do domínio referido por uma sentença que legitima a submissão dessa sentença a um certo princípio lógico. Dessa forma, diferentes domínios implicam diferentes maneiras de se raciocinar sobre seus objetos, o que impõe limites à ideia de haver princípios lógicos universais. Nesse sentido, o que origina a disputa entre platonistas e intuicionistas é a maneira como cada um deles intenciona o domínio de referência de suas asserções, ou seja, é a constituição intencional de um domínio que *exige* uma certa lógica, e não o contrário.

Por fim, no terceiro capítulo, trataremos do seguinte problema: se a verdade de uma proposição matemática é caracterizada por ser necessária e atemporal, como conciliar isso com a exigência intuicionista de que uma proposição só pode ser verdadeira se *possuirmos* a sua prova? Isso quer dizer que uma proposição é verdadeira apenas *após* a existência de sua prova? O que dizer então do suposto caráter necessário e atemporal das verdades matemáticas? Tendo em vista essas

questões, argumentaremos em defesa da possibilidade de se falar de uma noção abstrata e atemporal de existência de uma prova, sem que isso nos comprometa com alguma espécie de realismo ingênuo. Desse modo, o caráter necessário e atemporal da verdade de uma proposição matemática não será comprometido pela exigência intuicionista de que uma proposição só pode ser considerada verdadeira desde que se possua a sua prova.

6.2. Uma Perspectiva Fenomenológica

Principalmente com base nos trabalhos de Tieszen e da Silva, introduzimos a seguir a perspectiva teórica da fenomenologia, da qual depende o desenvolvimento das seções ulteriores.

Tieszen (2010) defende a tese de que um certo realismo matemático é compatível com o idealismo fenomenológico transcendental de Husserl, levando em consideração, sobretudo, a obra deste autor no período em torno de 1907¹⁰⁷. Antes de propor a compatibilidade dessas duas concepções, Tieszen faz uma apresentação sumária do que em geral se entende por realismo – ou platonismo, seu sinônimo – e idealismo matemáticos. Restringindo-nos ao que ordinariamente podemos considerar como sendo aquilo sobre o qual um matemático pensa durante o exercício de seu ofício, incluiríamos entidades abstratas como: objetos geométricos, números, funções, grupos, conjuntos, categorias, entre outras, além de verdades matemáticas sobre o que se enuncia a respeito de tais entidades. A concepção realista da matemática defende então a posição de que essas entidades são mentalmente-independentes. Nesse sentido, verdades matemáticas, bem como as entidades abstratas às quais elas se referem, são da maneira que são mesmo que não sejam conhecidas por nenhum sujeito. Elas não foram construídas por nós e tampouco são constituídas em consonância com nossa estrutura cognitiva ou com os movimentos de nosso arbítrio. Numa perspectiva mais ampla, os platonistas também consideram a existência independente de entidades que não são estritamente matemáticas, como sentidos, proposições, propriedades, conceitos, essências, etc., além de distinguirem entre entidades extensionais e intensionais, algo não muito usual na prática matemática. Tieszen procura se limitar ao platonismo matemático.

Em oposição, há o idealismo ou o antirrealismo matemáticos, que, numa caracterização sumária, são tidos como a afirmação de que as entidades matemáticas e as verdades que se enunciam sobre elas são mentalmente-dependentes. Ademais, tais entidades, apesar de serem abstratas, não seriam, como no caso do platonismo, eternas ou atemporais.

Colocado nesses termos gerais, nota-se que o realismo e o idealismo matemáticos são incompatíveis. Assim, o objetivo de Tieszen (2010) é caracteri-

¹⁰⁷ A esse respeito, Tieszen (2010, 1) cita as seguintes obras de Husserl: *The Idea of Phenomenology*; *Ideas I*; *Cartesian Meditations*; parte II de *Formal and Transcendental Logic*; e trechos de palestras que aparecem em *The Phenomenology of the Consciousness of Internal Time*.

zar melhor o realismo matemático e demonstrar como ele se compatibiliza com o idealismo fenomenológico transcendental, o qual possui particularidades que o distinguem em aspectos importantes do mero idealismo.

Aprofundando a caracterização de realismo matemático, os objetos matemáticos abstratos mentalmente-independentes envolvem as seguintes propriedades¹⁰⁸: não são entidades mentais, tampouco ideias subjetivas, pensamentos ou imagens produzidas por seres humanos; transcendem a consciência humana, não são imanentes a ela; existiriam mesmo que não houvesse mentes no universo; *ser expreso* ou *ser pensado* não lhes são propriedades essenciais; são externos à consciência humana, mas como também são abstratos, essa externalidade adquire um sentido diferente do que atribuímos aos objetos físicos, materiais ou da experiência sensível. Nessa direção, Tieszen (2010, 4) emprega o termo “abstrato” não no sentido em que é empregado no contexto da teoria Husserliana sobre totalidades e partes¹⁰⁹, onde objetos abstratos não são ontologicamente independentes, pois dependem daquilo do qual foram abstraídos. Para Tieszen, um objeto abstrato se caracteriza por *não* possuir uma natureza espacial, *não* se envolver em relações causais e *não* poder ser experienciado por nenhum dos cinco sentidos. Por outro lado, um objeto concreto, que é ontologicamente independente da existência de outros objetos, realizaria positivamente todas essas condições. Além disso, ao contrário de objetos situados no espaço físico ou de objetos do *sentido interno* – pensamentos, processos mentais, imagens –, os objetos matemáticos abstratos não possuem uma extensão temporal, ou como dizem alguns platonistas, são eternos ou atemporais, de modo que não se sujeitam à geração ou à corrupção.

Tieszen (2010, 5) chama a atenção para a distinção husserliana entre objetos reais e ideais, a qual contribuirá para a sua caracterização de realismo matemático. Um objeto ideal pode ser compreendido nos mesmos termos da noção de objeto abstrato dada acima – uma entidade não mental, independente, atemporal. Quanto aos objetos reais, eles se diferenciam dos ideais sobretudo por possuírem uma duração temporal, o que se aplica tanto a objetos do *sentido externo*, i.e., situados num espaço e num tempo externo, quanto a objetos do *sentido interno*. Ainda que possamos falar isoladamente de uma parte não independente de um objeto real, tal parte, que é também um objeto real, não existe isoladamente do todo do qual é parte. Assim, se para Husserl os objetos matemáticos são objetos ideais, temos um realismo como o descrito nos moldes acima, em que, ao contrário de um realismo ontológico imanente, como o de Aristóteles, por exemplo, a existência dos objetos matemáticos não depende da existência de objetos reais.

Uma outra distinção entre objetos reais e ideais que interessa a Tieszen diz respeito à diferenciação, que pode ser remontada a Platão, entre exato e inexacto, perfeito e imperfeito. Isso quer dizer que os objetos ideias matemáticos são perfeitos, sendo suas instanciações (no mundo material) ou expressões e pensamentos acerca deles meras aproximações.

¹⁰⁸Cf. (Tieszen, 2010, 4).

¹⁰⁹Cf. a investigação III, em (Husserl, 2008).

Embora haja um consenso entre os realistas a respeito das características que estamos aqui atribuindo ao realismo, nem sempre é o caso deles concordarem sobre quais objetos ideais matemáticos existem, i.e., quais objetos abstratos matemáticos mentalmente-independentes existem. Adotando uma posição reducionista, pode-se, por exemplo, ser realista a respeito dos números naturais, mas não a respeito dos números reais ou imaginários, que seriam definidos em termos dos primeiros; uma outra estratégia seria considerar apenas conjuntos como objetos ideais matemáticos, os quais serviriam de fundamento para definir outros objetos¹¹⁰.

Tieszen (2010, 6) observa que a teoria dos conjuntos, de maneira notável, leva a concepção realista da matemática a se confrontar com novos problemas ontológicos e epistemológicos. Ademais, uma compreensão fenomenológica desses problemas deve ir além do que encontramos na obra de Husserl, seja porque alguns deles ganharam força apenas após a época desse autor, seja porque o próprio Husserl não lhes dirigiu muita atenção¹¹¹. Um desses problemas diz respeito ao fato de lidarmos, na teoria moderna dos conjuntos, com enunciados existenciais envolvendo conjuntos transfinitos enormes. Apesar da mente humana não poder de fato apreender a existência de números naturais muito grandes, podemos *idealizar* o que a sua capacidade finita permite apreender, e imaginar que seria possível haver uma apreensão completa de cada um dos números naturais. No entanto, considerando, por exemplo, alguns dos axiomas existenciais de ZFC, como os axioma do infinito, do conjunto potência e da substituição, logo nos confrontamos com conjuntos transfinitos enormes: não nos comprometemos apenas com a existência de conjuntos infinitos enumeráveis, mas também com a existência de conjuntos não enumeráveis, com a existência do conjunto potência de conjuntos não enumeráveis, e assim por diante. Desse modo, diferentemente do que ocorre com o caso dos números naturais,

we cannot idealize the *finite* mind or *finite* capacities in such a way as to cover the grasp or formation of such transfinite objects. Transfinite sets transcend the possibility of being known on the basis of acquaintance with all of their members. A much more substantial idealization has to be involved (Tieszen, 2010, 7, grifo do autor).

Assim, o realismo matemático se vê confrontado com questões particulares à teoria dos conjuntos, como: existem, de maneira atual, conjuntos infinitos completos, sobretudo os conjuntos transfinitos que envolvem uma idealização mais robusta?; devemos admitir a existência de conjuntos transfinitos especificados impredicativamente, como o axioma da substituição nos permite fazer? Tieszen (2010, 7) alega que alguns filósofos ou matemáticos, como Gödel, estariam dispostos não apenas a se comprometerem com uma teoria impredicativa dos conjuntos, mas também a ir além dos compromissos existenciais presentes em ZFC, de modo que a busca por novos axiomas revelaria mais do que já existe no universo abstrato e mentalmente-independente de conjuntos transfinitos.

¹¹⁰(Tieszen, 2010, 6).

¹¹¹A propósito, esse é um dos motivos que nos fez eximir da preocupação de fazer um trabalho meticuloso de interpretação da obra de Husserl. Quando lemos filósofos da matemática que se enquadram num viés husserliano, como Tieszen, van Atten, Tragesser, da Silva, não é incomum encontrarmos a afirmação de que estão mais se apropriando do que interpretando a filosofia de Husserl.

Feitas tais elucidações acerca do realismo matemático, consideremos agora o idealismo fenomenológico transcendental, para que possamos avaliar em que medida essas duas concepções podem ser ditas compatíveis. Para compreendermos esta última concepção, precisamos antes compreender a noção de *redução fenomenológica*, também conhecida como *epoché*. Numa palavra, a redução fenomenológica consiste em voltar-se à experiência intencional, considerando-a como tal. Isso nos introduz mais uma noção, a de *intencionalidade*, que desempenha um papel central na fenomenologia. Entende-se por intencionalidade aquilo que nos diferentes atos da consciência – como imaginar, lembrar, desejar, perceber – se caracteriza como um direcionar-se, um visar algo. Um ato da consciência se direciona a algo por meio de uma intenção, que o apresenta de uma certa maneira, mesmo que esse algo não exista. Nesse sentido, toda consciência é consciência de algo, de modo que uma experiência não intencional não é uma experiência da consciência. Em outros termos, um sujeito se dirige a algo (que pode ser um objeto, um estado de coisas, um conceito, uma ideia) por meio de uma intenção envolvida num ato da consciência (que pode ser pensar, lembrar, imaginar, julgar). Esse algo, talvez inexistente, se apresenta à consciência como foi intencionado, ou seja, como foi pensado, lembrado, imaginado, etc.

Uma maneira de representar figurativamente a estrutura da intencionalidade seria¹¹²:

Ato (Conteúdo) → [objeto].

Nota-se nessa representação esquemática a estrutura básica de um ato intencional, que se distingue entre dois polos: *noesis* e *noema*. O primeiro consiste num ato da consciência, ao passo que o segundo consiste naquilo que é visado – *como* é visado, ou seja, como conteúdo da experiência de um ato da consciência, não como algo além dela – por esse ato. Um objeto pode ser visado de diferentes maneiras: *como* uma percepção, uma imagem, uma memória, de modo que a maneira como ele se apresenta a partir de uma certa visada é o que se compreende por *noema*. No esquema acima, coloca-se o objeto entre colchetes para indicar a condição de que tal objeto pode não existir. A esse respeito, Tieszen afirma:

[W]e “bracket” the object because we do not assume that the object of an act always exists. Phenomenologists are famous for suggesting that we “bracket” the object, and that we then focus our attention on act (noesis) and act-content (or noema), where we think of an act as directed toward a particular object by way of its content (or noema). Whether the object exists or not depends on whether we have evidence for its existence, and such evidence would be given in further acts carried out through time (Tieszen, 1989, 23).

Um exemplo ajuda a elucidar esses pontos. Considerando uma sentença *S*, um matemático pode se envolver com ela por meio de diferentes atos da consciência (ou, empregando um sinônimo, atos cognitivos), i.e., ele pode acreditar, saber ou lembrar que *S*, entre outros. Desse modo, o sentido da sentença *S* – o que ela ex-

¹¹²(Tieszen, 1989, 23).

prime \neg , que consiste no *conteúdo* do ato da consciência¹¹³, mantém-se o mesmo, ao passo que esse ato pode variar. Ademais, nada impede que o inverso ocorra: o ato da consciência se mantém fixo, mas seu conteúdo se modifica. O conteúdo de um ato intencional relacionado a S poderia ser, por exemplo, $\exists x F(x)$. Nesse caso, o direcionar-se a um objeto consistiria em um matemático conhecer (ou acreditar, lembrar, etc.) que $\exists x F(x)$, para um certo F e um domínio D de objetos em particular¹¹⁴.

Concebe-se então a noção de *intuição*, que é compreendida como a realização das condições balizadas pela intenção dirigida a um objeto. Se tais condições são realizadas, temos evidência de que o objeto intencionado existe¹¹⁵. Voltando ao nosso exemplo, conhecer S é um ato intencional dirigido ao estado de coisas $\exists x F(x)$, que será o caso se pudermos apresentar ao menos um objeto $a \in D$, tal que $F(a)$. As condições que esse ato intencional prescreve podem ou não ser realizadas, estabelecendo assim se intuímos ou não o conteúdo de S . Note-se que a existência do objeto¹¹⁶ intencionado não pode ser concebida à parte de um ato intencional, pois é ele que determina as condições que, se realizadas, compõem a evidência de que o objeto existe.

Feita essa aproximação inicial a alguns dos principais conceitos da fenomenologia, voltemo-nos por ora ao conceito de redução fenomenológica. Uma maneira de abordá-lo é por meio do método cartesiano da dúvida. Com ele se pode notar que, quando tentamos duvidar de tudo, nos damos conta de que nem tudo pode ser colocado em dúvida, pois enquanto pensamos que tudo é dubitável, é indubitável que pensamos que tudo é indubitável. Do mesmo modo, isso ocorre com a redução fenomenológica, que consiste em focar no *Ato (Conteúdo)* de um ato intencional, não no objeto intencionado, que foi colocado entre parênteses, fazendo com que não dependamos de nenhuma hipótese que envolva a sua existência. Assim, a despeito do objeto intencionado existir ou não, estamos certos do ato intencional que se dirige a ele:

If I am perceiving or judging, for example, then whether these activities are veridical or not, whether they have objects that exist or not, it is nonetheless clear that I am *perceiving* this or that, or *judging* this or that. The awareness that I am perceiving or judging implies that I have the capacity to *reflect* on my cognitive activities. In this reflection something is given to me that I cannot doubt (Tieszen, 2010, 9, grifo do autor).

Ao refletirmos sobre nossas capacidades cognitivas, refletimos sobre o que nos é imanente, distanciando-nos assim da *atitude natural*, em que ingenuamente presupomos experienciar um mundo objetivamente dado, que se encontra “lá fora”,

¹¹³“We can think of the contents associated with acts as the meanings or senses under which we think of the objects” (Tieszen, 2005, 327).

¹¹⁴(Tieszen, 1989, 24).

¹¹⁵(Tieszen, 1989, 24).

¹¹⁶O uso da palavra “objeto” impõe uma certa confusão. De fato, o que é intencionado não se restringe a objetos, pode ser uma entidade qualquer, como um estado de coisas, por exemplo. Assim, quando o [objeto] é um estado de coisas, dizer que o [objeto] existe equivale a dizer que o estado de coisas intencionado é o caso.

transcendente. Desse modo, com a redução fenomenológica, focamos no que se apresenta a nós tal como isso se apresenta a nós, restringindo-nos assim à esfera da aparência. Ou seja, num ato intencional, podemos colocar em dúvida se o que se apresenta é realmente o caso, mas não podemos duvidar da aparência mesma, que em sua imanência é dada de maneira absoluta¹¹⁷, não se relativizando a uma intermediação. Em particular, ainda que a percepção de um determinado objeto seja uma alucinação, podemos nos focar na alucinação enquanto tal, sem nos comprometermos com o que a alucinação sugere existir.

Como vimos na penúltima citação, a existência de um objeto é evidenciada por atos intencionais que se sucedem no tempo. Dessa forma, uma sequência de atos intencionais pode promover uma correção mútua, acumulando evidências sobre a existência de um determinado objeto. Por exemplo, num primeiro momento, a consciência pode experimentar a visão de uma cobra num quintal, no entanto, visadas posteriores da consciência podem revelar que essa percepção inicial era uma ilusão, que o que de fato se percebe é uma mangueira enrolada. Radicalizando essa condição, pode ser o caso que esse processo de correção continue indefinidamente, promovendo um conflito global entre os atos intencionais, de maneira que toda nossa experiência perceptual se degenere numa ilusão. Contudo, a despeito de que, neste caso, “nenhum mundo natural seria constituído na nossa experiência”¹¹⁸, ainda haveria a consciência, pois, conforme afirma Tieszen, não podemos escapar do ser absoluto dos processos mentais, que permanecem pressupostos em qualquer tentativa de duvidar da existência de variados fenômenos.

Assim, por meio da redução fenomenológica, voltamo-nos ao imanente, que é absoluto, o qual se distingue do que é transcendente, que é relativo à consciência. A relatividade do transcendente à consciência implica que não podemos falar da existência de um objeto, mesmo que seja mentalmente independente, sem levarmos em conta o sentido do seu ser, que foi constituído por uma intencionalidade. Distanciamos-nos da atitude fenomenológica se falamos de objetos existindo em si, à parte de qualquer envolvimento com a consciência, pois “o que quer que sejam as coisas, elas são coisas experienciáveis”¹¹⁹. Apenas a experiência¹²⁰ pode lhes prescrever um sentido, mesmo que esse sentido postule uma entidade transcendente, de existência objetiva:

[T]he whole spatiotemporal world and each of its constituents is thus, according to its sense, a merely intentional being. It is a being posited by consciousness in its experiences. Each constituent of the world, of essential necessity, can be determined and intuited only as something identical through motivated multiplicities of appearances. It is something invariant for consciousness through a manifold of appearances. Beyond that it is nothing (Tieszen, 2010, 11).

Dessa forma, a consciência, que é dada de maneira imanente e absoluta, constitui o sentido da objetividade, a qual, a menos que nos envolvamos com um rea-

¹¹⁷(Tieszen, 2010, 10).

¹¹⁸(Tieszen, 2010, 10).

¹¹⁹(Tieszen, 2010, 10).

¹²⁰A palavra “experiência” porta o sentido de vivências da consciência, não o de experiência empírica, como poderia ser entendido numa concepção naturalista.

lismo ingênuo, não pode ser constituída fora dessa intermediação¹²¹. Temos então uma consciência *doadora-de-sentido*, por meio da qual pensamos a realidade como existente, e que, por ser absoluta, existe por si mesma, não como mandatária de uma outra doação-de-sentido¹²².

Isso nos coloca no âmbito do idealismo fenomenológico transcendental, que não se identifica com o realismo nem com o idealismo. No primeiro caso, a identificação falha porque a existência de um objeto é sempre mediada por uma intencionalidade, que não se dá fora de uma performance atual ou potencial da consciência. Já no segundo caso, não há identificação porque, a despeito de que o sentido do ser de qualquer objeto que se apresente como existente seja perpassado por uma experiência da consciência, reconhece-se que nem tudo é constituído como um fenômeno mental. Além disso, a subjetividade transcendental, onde se processam os atos intencionais, não se reduz a um subjetivismo, ela também pode ser compreendida, por exemplo, como uma comunidade científica que tem uma concepção em comum sobre a realidade, “uma interseção de horizontes de diferentes egos na constituição de um mundo objetivo comum”¹²³.

Como Tieszen (2010, 12) afirma, o idealismo fenomenológico transcendental não nega que haja objetividade ou verdade objetiva. O que essa abordagem filosófica propõem é que todo tipo de objetividade – já que nenhum objeto escapa da redução fenomenológica – deve ser investigado a partir de como a consciência constitui o sentido da objetividade, envolvendo-nos assim no que esse autor denomina de análise constitucional. Dessa maneira, cabe-nos analisar tanto a constituição do sentido do ser de objetos concernentes a atos fundadores relativos à percepção sensorial, como a constituição do ser de objetos concernentes a formas fundadas da consciência – baseadas em atos de abstração, generalização, reflexão, idealização –, como objetos categoriais, ideais, ou, mais especificamente, objetos matemáticos.

Apesar de nenhum objeto, mesmo que seja um objeto da percepção, poder aparecer ao ego sem por ele ser intencionado, tal condição não implica que esse objeto nos é dado como uma entidade mental ou subjetiva. Isso depende de como o intencionamos. Podemos intencioná-lo como um objeto real do mundo empírico, que existe de maneira independente, ou seja, a consciência pode constitui-lo como um objeto que transcende os fenômenos mentais:

[T]he meaning of the being of physical objects is constituted by consciousness in such a manner that physical objects are not mental entities. They are not meant as mental entities. They are constituted as external objects, as objects that are in space and in external time. We are led, in this sense, to a kind of realism about physical objects. This is different, however, from a naive realism. It is, rather, a phenomenological or

¹²¹ “[I]f what is experienced has the sense of transcendent being then it is experience itself that constitutes this sense” (Tieszen, 2010, 11).

¹²² (Tieszen, 2010, 11).

¹²³ (Tieszen, 2010, 11). E quanto ao que foi dito nesse parágrafo, a seguinte citação é interessante: “Phenomenology shows the possibility of another conception of existence with all the benefits of realism without its metaphysical burden (this is why Husserl once claimed, on being ‘accused’ of idealism, that nobody was more realist than him, the transcendental idealist)” (da Silva, 2017, 138).

‘constituted’ realism that has its origins in transcendental subjectivity itself (Tieszen, 2010, 12).

Entramos no âmbito do realismo ingênuo a partir do momento em que ignoramos o papel da consciência como doadora de sentido, i.e., quando pretendemos conceber a existência de um objeto à parte de uma intencionalidade que constitui o sentido do seu ser. Em outras palavras, ao aceitarmos a existência de objetos existindo em si mesmos, de maneira completamente independente da consciência, somos realistas ingênuos.

No caso particular dos objetos matemáticos, o que dissemos sobre intencionalidade e constituição do sentido a partir de uma experiência da consciência se aplica igualmente (o que não poderia deixar de ser). Como Tieszen (2010, 13) afirma, é a experiência matemática – o que a consciência vivencia no exercício da atividade matemática –, que determina o sentido do ser de seus objetos. Assim, se do que é experienciado emana o sentido de ser ideal, não mental, imutável, não espacial e não material, “então é a própria experiência que deve, de uma maneira não arbitrária, constituir esse sentido”. O ponto que aqui deve ser notado é que os objetos matemáticos podem até ter as mesmas características que elencamos quando falamos do realismo matemático, contudo, deve-se acrescentar que, nos parâmetros do idealismo fenomenológico transcendental, tais características devem ser constituídas de uma maneira não arbitrária na consciência do sujeito transcendental.

Há, no entanto, uma ressalva importante que não podemos deixar de levar em conta: os objetos matemáticos não podem situar-se fora da dimensão temporal. Como no idealismo fenomenológico transcendental não se pode conceber a existência de um objeto fora de uma experiência possível, a qual necessariamente se situa no tempo, i.e., no fluxo das vivências da consciência, o sentido do ser de um objeto matemático – que emana da consciência –, também se situa no tempo:

Since we are within the sphere of possible experience for transcendental subjects we are within the sphere of temporality. This means that mathematical objects are also objects that must be in time, only now we will say that they exist at all times. Thus, instead of saying that mathematical objects are atemporal or eternal or timeless – somehow outside of time (and all possible experience) altogether – we will now say that they are omnitemporal (Tieszen, 2010, 13).

Por conseguinte, se um objeto matemático fosse situado fora do tempo, ele se situaria fora de toda experiência possível, algo que seria equivalente a uma concepção realista ingênuo, uma vez que a existência de tal objeto seria concebida como independente da consciência. Nessa perspectiva, Tieszen (2010, 14) cunha o termo “platonismo constituído”, que diz respeito a um platonismo não ingênuo concernente à lógica e à matemática. Esse platonismo se caracteriza por ter a sua origem no ego transcendental, ou seja, ao concebermos objetos abstratos mentalmente independentes, tal concepção é constituída por um sentido que se funda na consciência.

Vejam agora, sob a égide do idealismo fenomenológico transcendental, no que exatamente consiste falar de objetos mentalmente independentes. De acordo com o que vimos, uma característica fundamental que distingue, no âmbito da

matemática, o realismo do idealismo diz respeito à condição de concebermos entidades matemáticas como mentalmente independentes ou não. No entanto, essa dependência ao mental precisa ser qualificada à luz da redução fenomenológica, a menos que nos comprometamos com alguma forma ingênua de realismo ou idealismo.

A redução fenomenológica nos coloca na esfera da aparência. Por meio dela, voltamos nossa atenção ao *Ato (Conteúdo)* da intencionalidade, que nos é dado de maneira imanente e absoluta. Todavia, mesmo que nos restrinjamos a esse contexto, ainda podemos distinguir entre o que *aparece como* imanente e o que *aparece como* transcendente. E é correspondendo a essas noções de imanente e transcendente que compreenderemos, respectivamente, as noções de mentalmente dependente e mentalmente independente, que, após a redução fenomenológica, têm um significado diferente do que possuíam no contexto de um realismo ou idealismo ingênuos.

Acima mencionamos o exemplo de uma percepção enganosa, em que uma mangueira foi confundida com uma cobra. Por meio dele, podemos entender a distinção, no âmbito da aparência, entre o imanente e o transcendente. Num primeiro momento, o que aparece à consciência é uma cobra, todavia, num momento posterior, o objeto que aparece na continuação daquele ato intencional inicial é uma mangueira. Por haver esse conflito, uma inconsistência a respeito do objeto intencionado, o sentido intencional não pode ser realizado, ou seja, não podemos intuir o objeto que foi visado¹²⁴. Não obstante, se em sucessivos momentos do ato intencional é a aparência da mangueira que se estabiliza, isso indica que temos evidência de que se trata de um objeto “real” (entre aspas, pois diz respeito a uma realidade compreendida no contexto da redução fenomenológica, não a uma realidade completamente independente da consciência). Como afirma Tieszen (2010, 15), sem sairmos do âmbito da redução fenomenológica, podemos recuperar nossa experiência pregressa e recolocar a distinção entre aparência e realidade. Isso deixa claro que a cobra era uma mera aparência e que, “em realidade”, o que vivenciávamos era uma mangueira. Consequentemente, não temos um idealismo ingênuo, caracterizado pelo mote “ser é ser percebido”, uma vez que experiências posteriores mostraram que não havia uma cobra. O que se coloca como “real”, ou seja, como transcendente, independente da mente, é o que se mantém invariante nas experiências *até então* conduzidas por um ato intencional, não se eliminando a possibilidade de que uma experiência futura possa colocar em xeque uma evidência ratificada por experiências passadas:

The perception of the coiled garden hose, however, could itself be overturned in future experience. [...] Its being a coiled garden hose is *not absolute* even if the coiled

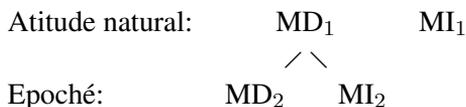
¹²⁴A noção de consistência é necessariamente intrínseca à de existência. Trata-se de uma questão de princípio, não meramente de fato, que a intencionalidade ligada à postulação de um objeto não contenha uma contradição: “Further acts of perception, for example, can disclose inconsistencies in the meaning intentionally attached to the object of a previous act of perception; no object exists which has both *A* and *not-A*, for any property *A*. *Inconsistencies immediately cancel the positing and the intentional object ‘vanishes’*” (da Silva, 2017, 45, grifo nosso).

garden hose is given as what is “real” and mind-independent in accordance with all of our evidence thus far. Our evidence that the coiled garden hose is mind-independent is in this sense presumptive (Tieszen, 2010, 15, grifo do autor).

O que foi dito no parágrafo anterior concerne a objetos sensoriais, mas é equivalentemente estendível a objetos matemáticos. Temos, igualmente, a redução fenomenológica e a noção de que correções e refinamentos provenientes do que experienciamos ao intencionarmos objetos matemáticos constituem a evidência da existência de objetos que transcendem o sujeito transcendental, i.e., os objetos matemáticos “reais”, mentalmente independentes. Deve-se ter claro, todavia, que não extrapolamos os limites da aparência, no sentido de que vislumbramos uma realidade absoluta, independente de toda aparência, quando um ato intencional se estabiliza ao vivenciar uma invariância. Como já fizemos notar, o transcendente é relativo à consciência. Uma realidade absoluta, tal como propõe uma metafísica realista, é compreendida pelo idealismo fenomenológico transcendental apenas como um ideal infinito¹²⁵. Nesse caso, só a aparência é absoluta, dada a sua imanência.

Há, dessa forma, um sentido forte e um sentido fraco a respeito do que se pode entender por mentalmente independente. O sentido forte é o apregoadado pelo realismo ingênuo, onde há a noção de coisa-em-si, entidade cuja existência é completamente independente da consciência. A partir do idealismo fenomenológico transcendental, a possibilidade de que o sentido forte seja o caso é inviável, porque seria inconcebível a existência de objetos mentalmente independentes que residem além de toda experiência possível. No entanto, um sentido fraco de mentalmente independente é admitido, em que se concebe a existência de entidades “reais”, entidades que se revelam invariantes numa variedade (*manifold*) de aparências¹²⁶.

Tieszen (2010, 18) então propõe a seguinte indexação das maneiras de compreender as distinções entre mentalmente dependente (MD) e mentalmente independente (MI):



Inicialmente, podemos dizer que há a atitude natural, em que se distinguem o mentalmente-dependente₁ – o aparente, o imanente –, do mentalmente-independente₁ – o “mundo lá fora”, além do aparente, numa transcendência completamente independente da consciência. A partir da redução fenomenológica, abandonamos a atitude natural, como se houvesse apenas o âmbito da aparência, que nos é imanente e absoluto. Inserido nesse contexto, o sujeito transcendental, por meio da intencionalidade, é capaz de se direcionar a objetos que o

¹²⁵“We are nonetheless not entitled to say that what is stable or invariant is the final, absolute reality. We cannot have a realism that recognizes an appearance-independent absolute reality. At best, the notion of ‘absolute reality’ might be preserved as an infinite ideal” (Tieszen, 2010, 16).

¹²⁶(Tieszen, 2010, 16).

transcendem, encontrando no mentalmente-dependente₁ a distinção mentalmente-dependente₂/mentalmente-independente₂. Dizemos então que existem algumas coisas que *aparecem a nós* como imanentes e outras como transcendentais, de maneira que é irreduzível a condição de *aparecer a nós*¹²⁷. E ainda que o domínio do idealismo fenomenológico transcendental seja o das experiências da consciência, isso não implica que as entidades aí postuladas sejam arbitrárias, como poderiam sugerir certas concepções subjetivistas ou solipsistas. O ato intencional é balizado por imposições objetivas:

One of the marks of objectivity in both sensory and mathematical experience is that we find our awareness to be constrained in certain ways. It is not possible to will objects or states of affairs in either sensory or mathematical experience to be just anything we want them to be. We find all of these moments of experience after the epoché (Tieszen, 2010, 17).

Por meio do diagrama acima, compreende-se melhor qual forma de realismo é compatível com o idealismo fenomenológico transcendental. Tieszen (2010, 18) alega que a maior parte do debate contemporâneo acerca das disputas entre realismo e idealismo matemáticos se dá no nível onde ocorre a distinção entre mentalmente-dependente₁ e mentalmente-independente₁. Nesse nível, o realismo e o idealismo são incompatíveis, sendo uma inconsistência afirmar que os objetos matemáticos são mentalmente-dependentes₁ e mentalmente-independentes₁. Seria também inconsistente dizer que os objetos matemáticos são mentalmente-dependentes₂ e mentalmente-independentes₂, não podendo, igualmente, aí ser encontrada uma compatibilidade entre o realismo e o idealismo. Contudo, como o mentalmente-independente₂ cai sob o mentalmente-dependente₁, não é uma inconsistência afirmar que os objetos matemáticos são mentalmente-dependentes₁ e mentalmente-independentes₂. O que se tem aqui é o que Tieszen denomina de “realismo matemático constituído” ou “platonismo constituído”, em que o mentalmente independente é constituído de maneira não arbitrária ou racional. É essa forma de realismo que é compatível com o idealismo fenomenológico transcendental, pois envolve intencionalidade, por meio da qual o conhecimento pode ser elucidado:

Constituted platonism, unlike naive metaphysical platonism, does not cut off the possibility of knowledge of mathematical objects. Knowledge involves intentionality. Mathematical knowledge is to be spelled out in terms of intentional directedness toward ideal or abstract objects, where the objects are to be thought of as (founded) invariants in mathematical experience. What we are describing here is a position about mathematical *experience* (Tieszen, 2010, 19, grifo do autor).

Após a redução fenomenológica, as caracterizações de realismo e idealismo propostas logo no início dessa discussão se mostram carentes de qualificações posteriores. Com a distinção mentalmente-dependente₂/mentalmente-independente₂, Tieszen propõe uma terceira possibilidade, compatibilizando um certo realismo matemático com o idealismo fenomenológico transcendental, em que o realismo e o idealismo não são mais ingênuos. Os objetos mentalmente-independentes₂, estabelecidos como invariantes em meio a uma variedade de aparências, transcendem

¹²⁷(Tieszen, 2010, 17).

o meramente aparente, todavia, não se situam fora de toda experiência possível, ou seja, não se caracterizam ingenuamente como mentalmente-independentes₁.

6.3. Platonismo versus Intuicionismo

Pelo que vimos na seção anterior, a abordagem fenomenológica se alinha com algumas concepções do intuicionismo lógico: na fenomenologia, as entidades matemáticas não existem por si mesmas, passam a existir quando são intencionadas por um sujeito transcendental – momento que pode ser identificado pela história transcendental. Até aí temos bastante semelhanças, diríamos mesmo que tais entidades não são descobertas e que à existência delas é imprescindível uma consciência que se dê conta delas. Há, no entanto, uma diferença fundamental, que reside no sentido que a intencionalidade atribui ao ser que postula. Embora uma entidade tenha uma gênese intencional, i.e., *passa* a existir em algum momento, a intencionalidade que a constitui pode caracterizá-la como uma entidade mentalmente-independente₂ e onitemporal. A fenomenologia permite, por exemplo, intencionar e legitimar a existência de conjuntos transfinitos enormes, que apesar de não serem efetivamente intuíveis, são *em princípio* intuíveis. Para o intuicionismo, a existência de tais conjuntos é ilegítima. Assim sendo, o objetivo da presente seção é esclarecer como podemos compreender, a partir de uma perspectiva fenomenológica, as divergências entre platonismo e intuicionismo.

De modo geral, a ideia básica por trás do intuicionismo consiste em dizer que a determinação do valor de verdade de uma proposição matemática está condicionada à possibilidade da proposição ser demonstrada. Isso já o coloca em pleno contraste com o platonismo, em que uma proposição, independentemente de ter sido demonstrada, possui um valor de verdade determinado. Mas há aqui alguns nuances que precisam ser esclarecidos, o que fazemos ao elencar abaixo quatro modos que caracterizam diferentes maneiras de compreender a atribuição de um valor de verdade a uma proposição¹²⁸. Sendo A um proposição qualquer, podemos nos deparar com uma das seguintes situações:

- (1) Demonstrou-se que A é verdadeira;
- (2) Demonstrou-se que A é falsa, ou, como Brouwer diz, demonstrou-se que A é um absurdo, i.e, demonstrou-se que $\sim A$ é verdadeira;
- (3) Não se demonstrou que A é verdadeira, nem se demonstrou que A é falsa, mas é conhecido um algoritmo capaz de decidir o valor de verdade de A ;
- (4) Não se demonstrou que A é verdadeira, nem se demonstrou que A é falsa, e tampouco se conhece um algoritmo que decida o seu valor de verdade.

De acordo com Brouwer (2011, 92), o caso (3) pode ser reduzido a um dos outros dois primeiros, o que indica que uma proposição nessa condição possui

¹²⁸(Brouwer, 975e, 552).

um valor de verdade determinado, ainda que esteja latente, i.e., potencialmente presente no algoritmo que o revelará¹²⁹. Além disso, Brouwer afirma que os dois primeiros casos possuem um caráter perpétuo, ao passo que uma proposição que se classifica de acordo com a condição (4) pode transitar para as outras classificações, o que se pode dever à circunstância de termos adquirido o conhecimento de um método efetivo que decida o seu valor de verdade ou à circunstância de alguma entidade matemática ter obtido uma propriedade que não possuía antes, já que o intuicionismo não concebe as entidades matemáticas como sendo necessariamente predeterminadas.

O lugar, portanto, para abordarmos o desacordo entre as concepções platonista e intuicionista é o que se classifica sob as condições do item (4), uma vez que nos demais pontos ambos concordam a respeito da determinabilidade do valor de verdade proposicional. Ao contrário de um platonista, um intuicionista não admite que uma proposição classificada de acordo com (4) tenha um valor de verdade determinado, o que implica na rejeição da validade universal de um dos princípios basilares da matemática clássica: o princípio lógico de bivalência.

Da Silva (2017, 78) enuncia em duas versões o princípio lógico de bivalência, uma se denomina subjetiva, a outra, objetiva. Na primeira, afirma-se que qualquer asserção significativa (*meaningful*, em inglês) “pode idealmente, em princípio, ser verificada”. Isso quer dizer que o que uma asserção afirma pode ser confirmado ou refutado numa experiência-de-verdade, uma vivência subjetiva que se dá no confronto do conteúdo da asserção com os fatos que lhes são relevantes. Já de acordo com a outra versão, a objetiva, o princípio é entendido como dizendo que qualquer asserção significativa possui um valor de verdade intrínseco – o verdadeiro ou o falso –, a despeito de qualquer verificação atual. Dito dessa maneira, a seguinte questão vem à tona:

How can it be that truth or falsehood, which can only be properly attached to assertions by means of *subjective* evidential experiences of adequacy or inadequacy of the content asserted with the facts, belong to assertions *independently* of such experiences being *actually* carried out? Or still, how can any assertion be either true or false *in itself, intrinsically*? (da Silva, 2017, 78, grifo do autor).

À primeira vista, responderíamos essa questão apontando o item (3) da lista acima. Diríamos que uma asserção tem um valor de verdade intrínseco não porque o evidenciamos numa experiência-de-verdade atual, mas porque possuímos um método que em princípio garante essa experiência. No entanto, da Silva, baseando-se na filosofia husserliana, evoca uma outra noção de *verificação em princípio*, cujo caráter potencial não está relacionado ao conhecimento de um método. De acordo com essa concepção, a verificação atual de uma asserção se coloca como um *ideal*: pressupõe-se que seja idealmente possível verificar uma asserção. Isso implica que, se esse ideal for atualizado, um valor de verdade é atribuído à asserção, o qual sempre lhe pertenceu, considerando que o seu sentido nunca foi alterado. Por essa razão diríamos que asserções possuem, independentemente de qualquer

¹²⁹Um finitista estrito, é válido observar, sequer aceitaria que proposições classificadas de acordo com (3) têm um valor de verdade determinado.

verificação atual, valores de verdade intrínsecos e definitivos.

Para elucidar essa noção de verificação ideal, da Silva a compara com um *ponto ideal* – uma noção da geometria projetiva –, que representa a direção de linhas paralelas que se interceptam no infinito. Por mais que percorramos essas linhas, tal interceptação estará sempre fora de nosso alcance, no entanto, assim como um ponto no infinito organiza a perspectiva pictorial do espaço, as verificações ideais organizam o campo de experiência da verdade:

The complete experience of truth may not actually belong to the ego's field of experiences – as vanishing points do not belong to the pictorial space – but as an imaginary focus this ideal unifies all the partial and limited experiences of truth into an integrated whole (da Silva, 2017, 78).

Assim temos que a noção de verificação ideal expressa na versão subjetiva do princípio de bivalência não possui o sentido de decidibilidade – ou *verificabilidade efetiva* –, não se enquadrando, portanto, no item (3) acima, aceito pelos intuicionistas. Mas como poderíamos argumentar pela legitimidade desse princípio, indo além da mera apresentação de uma metáfora? Da Silva (79, 2017) observa que a bivalência se trata de um princípio a priori, e por esse motivo sua validade não deve depender de questões de fato, como a existência atual de um método de decisão. Um outro ponto é que, por se tratar de um princípio lógico, ele é constitutivo dos fundamentos de qualquer justificação, ou seja, como justificar o que é pressuposto no próprio ato de justificação? Dessa forma, um princípio lógico não pode ser demonstrado, restando-nos somente apresentar as condições e pressuposições que conduzem à sua aceitação¹³⁰. Sua validade deve depender apenas de questões de princípio, constituindo-se, pois, como um objeto de investigação de uma filosofia transcendental.

Tratando os princípios lógicos no âmbito de uma lógica de asserções, devemos levar em conta que essas, em virtude de serem significativas, pressupõem um mundo, ao qual se referem. Por essa via, a validade de um princípio lógico não pode ser concebida sem levar em consideração o sentido do ser atribuído ao domínio referido pelas asserções submetidas ao princípio lógico em questão. Numa investigação fenomenológica transcendental, isso implica em analisar a intencionalidade desse domínio, i.e., investiga-se como ele deve ser concebido a fim de que um determinado princípio lógico seja nele validado.

Antes de prosseguir, convém introduzirmos a noção de asserção significativa, compreendida nos moldes da apresentação de da Silva¹³¹. Numa palavra, uma asserção é significativa se possui sentido sintático e semântico, ou, dizendo de outro modo, se é sintaticamente e semanticamente significativa. Dessa forma, um dos papéis de uma lógica de asserções (também conhecida como lógica apofântica) é identificar tipos sintáticos e tipos semânticos, bem como elucidar, a priori, as possibilidades de combinação desses tipos. Por exemplo, em “João é e”, temos uma asserção que não é sintaticamente significativa, porque de acordo com as regras que regimentam a combinação de tipos sintáticos, a sentença aberta “João

¹³⁰(da Silva, 2011, 334).

¹³¹Cf. (da Silva, 2017, 30-31; 71-72) e (da Silva, 2011, 11).

é –” poderia ser preenchida por um adjetivo ou um substantivo, mas não por uma conjunção. Já a asserção “o número 2 é verde”, apesar de ter um sentido sintático, é semanticamente sem sentido, pois considerando como intencionamos o domínio dos números, um número é a priori impedido de possuir uma cor.

Assim se observa um envolvimento intrínseco entre uma asserção e aquilo a que ela se refere. Tal envolvimento pode ser elucidado da seguinte maneira: uma asserção significativa é regida por regras semânticas, que por sua vez dependem da intencionalidade constitutiva do ser do domínio referido; o sentido do ser de tal domínio deixa estabelecido a priori sua compatibilidade de combinação com outros domínios, que compõem diversos tipos ontológicos – no parágrafo anterior, por exemplo, o contrassenso de “o número 2 é verde” se deve à condição de que o sentido do ser de um objeto ideal é a priori impedido de possuir uma propriedade exclusiva de uma subclasse de objetos reais, ou melhor, os sentidos do ser atrelados a diferentes tipos ontológicos estabelecem de maneira a priori compatibilidades entre si; por conseguinte, uma asserção significativa exprime uma situação que é a priori possível, sendo verdadeira se a situação expressa for também atual:

A world contains many different ontological regions, objects of different types, and no assertion about this world is materially meaningful that does not respect a priori compatibilities and incompatibilities of ontological types. But a priori ontological compatibilities and incompatibilities are also aspects of the intentional meaning attached to the world. Once assertions respect syntactic and semantic rules of formation they are meaningful, that is, able to represent possible situations of the world (da Silva, 2017, 81).

Por essa razão, do ponto de vista da objetividade, quando um sujeito faz uma asserção, ele se compromete com a factualidade da possibilidade em princípio expressa por ela. Já do ponto de vista da subjetividade, ele se compromete com a possibilidade em princípio do valor de verdade da asserção ser intuída numa experiência-de-verdade¹³². E lembremo-nos, tal possibilidade em princípio não diz respeito a questões de fato, como a existência de um método de decisão.

É interessante observar como a significatividade de uma asserção não origina um colapso com o seu valor de verdade, mesmo no caso de asserções matemáticas, que envolvem propriedades necessárias. A sentença

“uma sequência de sete 7s ocorre na expansão decimal de π ”

é sintaticamente significativa, mas seria também semanticamente significativa? Para que assim o seja, deve-se apelar à condição de que qualquer sequência de dígitos pode em princípio ocorrer em qualquer expansão decimal. Todavia, ao contrário de uma sentença que exprime um estado de coisas contingente, se a sentença acima for verdadeira, ela é necessariamente verdadeira; se falsa, necessariamente falsa. Assim, supondo que seja falsa, como dizer que ela exprime um estado de coisas possível? Da Silva (2017, 83) propõe que as regras semânticas envolvem apenas tipos, não instâncias de tipos. Posto isso, os tipos de *sequência*

¹³²(da Silva, 2017, 71).

de dígitos e de *expansões decimais* são a priori compatíveis, a despeito de algumas das instâncias de cada um serem, por uma questão de fato, necessariamente incompatíveis.

Numa outra ocasião¹³³, da Silva fala de um sentido fraco e de um sentido lógico de possibilidade. A sentença “175 é um número primo”, por exemplo, é necessariamente falsa, consequência da definição de número primo e do fato de que o número 175 possui divisores próprios. Diz-se então que, apesar de essa sentença, num sentido lógico, ser necessariamente falsa, ela poderia, num sentido mais fraco de possível, ser verdadeira. Ou seja, quando se diz que uma sentença significativa exprime um estado de coisas possível, é a noção mais fraca de possibilidade que é levada em consideração: a que versa sobre a compatibilidade entre *tipos ontológicos*. Sem essa concepção mais fraca, teríamos dificuldade em explicar como é possível conjecturar sobre a *verdade* de uma proposição que posteriormente é demonstrada ser (necessariamente) falsa, ou em distinguir entre um fato matemático demonstrado e a mera suposição desse fato.

Por esse motivo que da Silva (2017, 83) afirma que o conteúdo de uma evidência possível é negativo: não há nada que a priori impeça que 175 seja um número primo, pois o que pode ser estabelecido a priori diz respeito apenas à compatibilidade entre tipos ontológicos. Em termos gerais, isso quer dizer que um estado de coisas pode em princípio ser experienciado desde que possamos determinar a priori, considerando somente os tipos ontológicos envolvidos, o que não pode ser excluído de ser o conteúdo de uma experiência.

A partir do que foi exposto, reconsideremos agora a pergunta colocada há pouco, que dizia respeito ao que o princípio de bivalência implica: como uma proposição, independentemente de uma experiência que a confronte com os fatos por ela expressos, pode possuir um valor de verdade intrínseco? Ou seja, como podemos a priori legitimar que uma proposição arbitrária é verdadeira ou falsa, mesmo não possuindo um método que possa verificá-la?

De acordo com o que vimos, a abordagem fenomenológica dessa questão insiste que, por estarmos tratando de um princípio lógico, devemos instaurar uma investigação transcendental, a qual nos esclarecerá quais condições devem ser pressupostas a fim de que o princípio de bivalência seja válido. Nossa atenção deve voltar-se para o mundo referido pelas proposições submetidas ao princípio lógico em questão, pois é referindo-se a ele que a significatividade e o valor de verdade de tais proposições são compreendidos. Voltar a atenção para esse mundo significa processá-lo numa redução fenomenológica, i.e., significa inquirir a intencionalidade que constitui o sentido do seu ser, revelando assim os critérios que legitimam as asserções que o têm como referência:

[T]he truth of logically true assertions does not depend of their particular contents, but depends on the sense of being of the domain to which they refer. In order for, say, either *A* or *not-A* to be valid, no matter which *A*, the domain where *A* is interpreted must be intentionally conceived *in a certain way*. It befalls on phenomenology the task of clarifying what this way of being is and why conceiving the domain of kno-

¹³³(da Silva, 2011, 346, nota 9).

wledge thus is justified in the overall schema of knowledge (da Silva, 2017, 9, nota 7, grifo do autor).

O que se destaca nessa abordagem é o fato de que o princípio lógico em si não é questionado, dada a sua própria condição de princípio, no entanto investigam-se as pressuposições que o validam. Tragesser também argumenta nessa direção, em que a constituição intencional de um domínio é que *exige* uma determinada lógica, e não vice-versa:

The principal contribution Chapter IV makes to the foundations of logic is to show, on the basis of phenomenological ontology [...], that there exist different worlds or objective domains *W* and *V* such that, for the purposes of formulating true and adequate theories of these domains, *W* e *V* require different logics (Tragesser, 1977, 90, grifo nosso).

Dessa forma, compreendendo a intencionalidade que constitui o mundo referido por sentenças significativas elucidamos a validade dos princípios lógicos que as regem. Por conseguinte, a pergunta que deve ser feita é: quais características dessa intencionalidade são responsáveis pela validação do princípio de bivalência? Tal intencionalidade *deve conceber* um mundo como sendo objetivamente completo, inteiramente determinado em si mesmo. É esse sentido do ser, atribuído ao mundo referido por sentenças significativas, que legitima a *verificabilidade ideal* pressuposta pelo princípio lógico de bivalência. Assim, tem-se garantido a priori um domínio maximamente consistente de fatos, onde um, e apenas um, de dois estados de coisas complementares e incompatíveis entre si é o caso. Isso permite que uma proposição sobre qualquer estado de coisas possível seja *em princípio* verificável contra os fatos – o que dá a ela um valor de verdade intrínseco¹³⁴.

Da Silva (2017, 87) observa que princípios lógicos são a priori e universais, contudo, à luz da investigação fenomenológica por ele proposta, tais características precisam ser melhor qualificadas. Nesse caso, um princípio lógico é a priori porque é independente de qualquer experiência atual¹³⁵, mas não é independente de uma determinação a priori de quais experiências são possíveis em princípio num determinado domínio. Essa determinação possui um caráter fenomenológico transcendental, pois está envolvida com a maneira *como* intencionamos o domínio em questão.

Quanto à universalidade, segue-se que a validade de um princípio lógico é relativa ao domínio cuja intencionalidade o legitima:

[V]alidation in one domain is not exportable to *all* domains. The validity of logical principles of reasoning is confined to the domains whose sense of being validates them. Hence, in a sense, logic is *not* universal, or is, but only within the limits of a given intentional positing. Different ways of conceiving a domain of being – for example, the domain of real numbers classically and intuitionistically conceived – may require different ways of reasoning about the objects of this domain (da Silva, 2017, 87-88, grifo do autor).

Dito isso, temos que uma sentença significativa possui um valor de verdade intrínseco em virtude do sentido do ser atribuído ao domínio referido cumprir com

¹³⁴Cf. (da Silva, 2017, 81-82; 88).

¹³⁵Que pode ser uma experiência intuitiva em que se verifica o valor de verdade de uma proposição, por exemplo.

as características de ser objetivamente completo e maximamente consistente. Dadas tais condições, pode-se compreender a verificabilidade de qualquer proposição como um ideal. No entanto, se a significatividade semântica de uma proposição envolver domínios cuja intencionalidade os caracterizam como incompletos, por vezes dependendo da ação de um sujeito para serem completados, a verificabilidade não pode ser colocada como um ideal. Tal proposição não possuiria um valor de verdade intrínseco, sendo a sua determinação necessariamente dependente de uma experiência-de-verdade, que pode ser atual ou possível. Mas note-se, trata-se da noção de possibilidade compreendida nos parâmetros de uma verificação decidível (como as proposições caracterizadas de acordo com o item (3), acima), não nos parâmetros de uma verificabilidade ideal.

Podemos, desse modo, por meio de um viés transcendental, compreender o debate entre platonistas e intuicionistas. Aqueles intencionam o domínio de referência de suas proposições como objetivamente completo, já estes, como incompleto, constituído por meio de construções que se desenvolvem no tempo. Neste caso, nem todo estado de coisas representado por uma proposição se encontra determinado quanto à sua factualidade. *Por conta disso*, a bivalência não é válida em geral¹³⁶, apenas para proposições decidíveis. Sendo assim, a disputa entre platonistas e intuicionistas trata, no fundo, de um embate acerca da constituição intencional de seus respectivos domínios de referência.

É interessante observar a ordem conceitual que constitui esse argumento: partindo da intencionalidade de um domínio seguimos para a validação de um princípio lógico. Logo, se a lógica se segue de uma certa concepção da realidade, ou seja, se o modo de ser de um determinado domínio, que foi intencionado de uma certa maneira, *exige* uma lógica em particular, isso vai de encontro à ideia de que a lógica serve de base para uma metafísica, um ponto de vista que encontramos, por exemplo, na obra *The Logical Basis of Methaphysics*, de Dummett¹³⁷.

Após ressaltar que o conflito entre platonistas e intuicionistas se deve a pressuposições que cada uma das partes toma a respeito da natureza da realidade matemática e da verdade matemática, isso com base em hipóteses metafísicas, não com base numa abordagem transcendental e fenomenológica, da Silva afirma:

The conflict is dogmatic and thus unsurmountable. The phenomenological-transcendental approach, being non-dogmatic, can *understand* each side's perspective, corresponding as they are to different conceptions of reality, each acceptable on its own terms under the scope of the *epoché*. From the phenomenological perspective, Platonists and intuitionists are simply not talking about the same thing, since they do not have the same intentional conception of mathematical reality (da Silva, 2017, 86, grifo do autor).

¹³⁶Lembre-se que há pouco dissemos que um princípio lógico é a priori porque independe de qualquer experiência atual. É justamente por isso que a bivalência deixa de ser um princípio lógico no intuicionismo, uma vez que, neste contexto, para uma proposição ser verdadeira ou falsa deve ao menos haver uma experiência que evidencie a existência de uma método capaz de decidir o seu valor de verdade.

¹³⁷A esse respeito, cf. (Alves, 2011, 31), onde o autor defende que há pelo menos uma ideia em comum entre Dummett e Quine: “the idea that our logical principles constitute our principles about what there is, and therefore, that logic is metaphysics”.

A fenomenologia investiga esse debate a partir da *epoché*, o que significa, de acordo com a seção passada, que a distinção entre platonistas e intuicionistas deve ser considerada no âmbito da distinção entre MD_2 e MI_2 . De fato, para da Silva, o debate que não ultrapassa o âmbito da distinção entre MD_1 e MI_1 procura justificar os princípios lógicos por meio de pressuposições ontológicas e epistemológicas, que de modo geral ele denomina de hipóteses metafísicas. Num realismo concebido por meio de uma hipótese metafísica, por exemplo, há um mundo “lá fora” porque pressupõe-se que tal mundo *é* completo e independente do conhecimento. Isso caracteriza o que chamamos na seção passada de realismo ingênuo. Por outro lado, anuindo a uma abordagem transcendental, envolvemo-nos com uma questão de princípio. Se há um mundo “lá fora”, é porque ele *é concebido como* objetivamente completo, i.e., trata-se da intencionalidade que constitui seu sentido de ser. Como temos apresentado, o que interessa à fenomenologia é o voltar-se ao ato intencional enquanto tal, sendo consideradas ingênuas, ou carentes de melhores qualificações, pressuposições metafísicas que desconsideram a intencionalidade daquilo que uma pressuposição instaura. Em termos gerais, “[t]he difference is that metaphysical hypotheses have to do with how reality *is*, whereas transcendental presuppositions on how reality *is conceived to be* or how it *must be* given how it is conceived to be”¹³⁸.

Nesse sentido, a abordagem fenomenológica não pode colocar-se com o intuito de *justificar* a validade de um princípio lógico. E como o conflito entre platonistas e intuicionistas gira em torno da aprovação ou recusa do princípio de bivalência, a fenomenologia, quanto a isso, nos deixa num terreno neutro, servindo apenas para nos esclarecer por que esse princípio é aceito num contexto mas não em outro. A seguir, vejamos como a elucidação fenomenológica nos auxilia a esclarecer alguns problemas encontrados no interior do próprio intuicionismo.

6.4. Demonstração, Tempo e Verdade

Como visto, o cerne da disputa entre um platonista e um intuicionista se concentra na condição de que aquele, ao contrário deste, admite uma realidade objetivamente completa e independente. Nessa perspectiva, proposições matemáticas são compreendidas como descrições de fatos “que já estão aí”, de maneira que uma proposição é verdadeira desde que os descreva corretamente. Isso atribui à matemática uma conotação epistemológica que se assemelha às das ciências naturais, as quais pressupõe um “mundo objetivo lá fora”. No intuicionismo, por outro lado, o conhecimento, em certa medida, é constitutivo da realidade. É sob esses termos que a noção de demonstração – compreendida como uma atividade de conhecimento, por meio da qual um sujeito encontra as garantias de evidência do valor de verdade de uma proposição matemática – desempenha um papel fundamental. Nesse contexto, onde a autonomia da realidade é colocada em questão, o que poderia atestar a verdade de uma proposição não se encontra plenamente de-

¹³⁸(da Silva, 2017, 85, grifo do autor).

terminado: a proposição tem a pretensão de dizer verdadeiramente sobre algo, mas esse algo não está completo, esperando por uma descrição correta, ele se constrói ao mesmo tempo em que se evidencia ao entendimento.

Um dos pontos distintivos do intuicionismo, portanto, é que nele uma proposição matemática, a despeito de seu caráter necessário, *torna-se* verdadeira. Ela não é intrinsecamente verdadeira ou falsa, pois seu valor de verdade não é concebido como algo que pré-existe à vivência de um sujeito que o evidencie atualmente (ou, ao menos, garanta tal evidência por meio da posse de um método efetivo de verificação). Nesta seção, baseando-nos principalmente nas filosofias de Prawitz e Dummett, trataremos da dificuldade de se conciliar as noções de demonstração e verdade, já que elas nos induzem a uma cisão de partes antagônicas: de um lado, temos uma noção temporal, empírica e epistemológica, de outro, uma noção atemporal, necessária e ontológica. Ao final, a partir do que vimos nas seções anteriores, proporemos uma maneira de superar esse antagonismo.

A noção de demonstração contém o elemento epistêmico necessário para que, aliada a uma concepção de verdade, seja possível opor-se a acusações concernendo a admissão de um realismo. Tomando por verdadeiro apenas aquilo que possamos evidenciar com a apresentação de uma demonstração, segue-se que a determinação desse valor de verdade está submetida à vivência de um sujeito cognoscente, mesmo que, por meio da posse de um método efetivo, tal vivência esteja garantida apenas em princípio.

Nesses moldes, equivalendo as noções de demonstração e verdade, o intuicionista conseguiria se desvincular do realismo. No entanto, Prawitz alerta que essa equivalência deve ser ponderada, sob o risco de estarmos exigindo demais do conteúdo de uma sentença:

By asserting a sentence you guarantee that there is a proof of it, but that is not what the assertion says; the content of the sentence, what you say by asserting it, is simply that the sentence is true, not that you have a proof of it. [...] It seems to be a misrepresentation of the assertion to think of its content as being that a proof has been found. It is to put too much in the content (Prawitz, 1998, 46).

De acordo com ele, podemos extrair consequências bastante contraintuitivas se não desvincularmos a verdade de uma sentença do fato de se ter obtido a sua demonstração. O exemplo a seguir, dado por Raatikainen (2004, 137), esclarece esse ponto. Se *A é verdadeira* significasse o mesmo que *A foi demonstrada*, poderíamos considerar equivalentes os dois enunciados abaixo:

- (1) Se alguém possui uma demonstração de que existe uma infinidade de números primos gêmeos, então alguém conhece bastante de números primos.
- (2) Se é verdade que existe uma infinidade de números primos gêmeos, então alguém conhece bastante de números primos.

Não obstante, isso contraria o uso mais natural e intuitivo que fazemos da noção de verdade em tais contextos. Numa situação hipotética, quando tomamos uma conjectura como premissa o que nos interessa é uma noção de verdade atemporal e

independente, para assim podermos construir um argumento que nos leve a certas consequências, dependentes da demonstração da conjectura em questão. Com uma noção muito restrita de asserção, em que a posse atual de uma demonstração é a palavra de ordem, seria difícil justificar o uso que fazemos de tais argumentações hipotéticas. A estranheza provocada pelo enunciado (2) nos deixa claro que asserir hipoteticamente que há infinitos números primos gêmeos não visa extrair consequências do fato de alguém conhecer a demonstração dessa conjectura, pois o objetivo de uma argumentação hipotética é, antes de mais nada, poder pensar sobre uma realidade que não pôde ainda ser conhecida.

Diante disso, Prawitz se pergunta se uma noção de sentido proposicional compreendida em termos epistêmicos necessariamente conduz à condição temporal de existência de uma demonstração:

What is the appropriate notion of truth for sentences whose meanings are understood in epistemic terms such as proof or ground for an assertion? It seems that the truth of such sentences has to be identified with the existence of proofs or grounds, and the main issue is whether this existence is to be understood in a temporal sense as meaning that we have actually found a proof or a ground, or if it could be taken in an abstract, tenseless sense (Prawitz, 2012b, 9).

A abordagem que Prawitz privilegia é a que favorece um sentido abstrato e atemporal de demonstração, para que assim possamos abranger outros usos da força expressiva de uma sentença, indo além da mera asserção. Essa abstração e atemporalidade seria viabilizada pela noção de verdade, que nos permitiria sempre atribuir a uma sentença, a despeito do uso que se faça dela, um mesmo conteúdo, seja empregando-a como uma hipótese, uma pergunta, ou uma asserção.

Assim, Prawitz (2012b, 14) acusa que autores de índole intuicionista, como Dummett e Heyting, identificam a verdade de uma sentença – de acordo com ele, o seu conteúdo – com as condições de asseri-la, as quais envolvem questões empíricas sobre a construção e posse de uma demonstração. Essa identificação restringiria o uso de sentenças apenas ao seu aspecto assertivo, já que empregando-as como conjecturas, por exemplo, a noção de verdade envolvida é outra que a de construção de uma demonstração.

Todavia, exatamente nesse ponto onde Prawitz argumenta por uma noção de verdade baseada numa concepção de demonstração abstrata e atemporal, ele é suspeito de retomar uma posição realista¹³⁹. De acordo com ele, *A é verdadeira* não deve ser equacionada com *A foi demonstrada*, mas com *A é demonstrável*, ou *existe uma demonstração de A*, em que esse *existe* é tomado num sentido atemporal¹⁴⁰. Para proposições decidíveis, essa noção de verdade é consentida pelo intuicionismo, no entanto, ao adotá-la de forma geral, surgem acusações de realismo:

The difficulty with his formulation is, of course, how we should construe the ‘can’ in ‘can be verified’. I am dubious about his explanation of it [...] in terms of an untensed and abstract (platonic?) sense of ‘exists’. An untensed use of ‘is true’ is no doubt admissible: but then it should genuinely be in the tense of timelessness, and

¹³⁹Cf., por exemplo, (Raatikainen, 2004, 140).

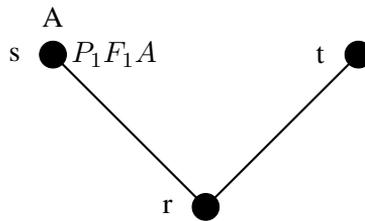
¹⁴⁰(Prawitz, 2012b, 15).

not in that of eternity; ‘is’ ought not to be read as ‘always was and always will be’. [...] it is equally hard to see how, on this conception of the existence of proofs, we can resist supposing that a proof of a given statement determinately either exists or fails to exist (Dummett (1987, 285) em réplica a Prawitz).

Num outro texto, Dummett (1998, 130) reconsidera a posição de Prawitz e nos esclarece de que maneira com ele concordaria. Sua proposta consiste em dizer que, situando-nos num ponto em que possamos olhar para o passado, temos o direito de afirmar que o que aconteceu estava determinado de assim o ter sido. De acordo com ele, o curso de eventos se desmembra em direção ao futuro, não em direção ao passado. Assim, um enunciado que se refere ao futuro não possui um valor de verdade intrínseco. No entanto, se ele obtém um valor de verdade no tempo referido, não mais se considera o curso de eventos do passado que não levaria a esse mesmo valor de verdade. Nesse sentido, Dummett afirma:

What we need, therefore, is a semantics for tensed statements that will allow us correctly to say at any given time, concerning some statement that has turned out at that time to be true, that it was always the case that it was going to be true, even though, at an earlier time, we could not correctly have said that it was true or going to be true (Dummett, 1998, 130).

Para ficar mais claro, empreguemos aqui o exemplo que Dummett apresenta. Primeiramente, ele considera uma linguagem com os operadores P_n , que significa *foi o caso n dias atrás*, e F_n , *será o caso n dias depois*. Se a uma sentença A antepuséssemos o operador P_2 , formando P_2A , por exemplo, tal sentença significaria *A foi o caso 2 dias atrás*. Consideremos então o seguinte diagrama, que ilustra o desmembramento do curso dos eventos r , s e t :



Dessa forma, com o estado de coisas r precedendo os estados de coisas s e t por 1 dia, sendo a sentença A verdadeira em s , mas não em t , situando-nos em r não poderíamos afirmar que A seria verdadeira daqui a um dia, i.e., F_1A . Isto se dá porque não ocorre de A ser verdadeira em todos os nódulos ligados (acessíveis) a r . Por outro lado, se o nosso ponto de vista se constituísse a partir de s , F_1A seria verdadeira em r , uma vez que t , onde não temos a verdade de A , não é acessível ao nódulo s , ou seja, olhando para o passado, ignoramos os caminhos que não levaram à verdade de A , por isso, em s , diríamos que sempre foi o caso que A se tornaria verdadeira. Portanto, sendo s o nosso ponto de vista, P_1F_1A é verdadeira em s , i.e., ontem já era o caso de que A seria verdadeira no dia seguinte. Dummett prossegue dizendo que a ideia básica dessa concepção temporal é a de que para o presente e o passado só existe um curso de eventos, não obstante existir, para o futuro, vários cursos possíveis, nenhum deles atual.

A noção semântica apresentada acima corresponde à maneira de Dummett concordar com Prawitz a respeito da concepção de que a verdade preexistiria à demonstração de uma proposição. Ela nos permite dizer, de qualquer sentença que *já tenha sido demonstrada*, que ela sempre foi verdadeira, ao mesmo tempo em que não precisamos consentir com a ideia de que uma sentença não demonstrada ou refutada está fadada a ser demonstrada ou refutada, ou jamais ser demonstrada ou refutada¹⁴¹.

Prawitz, todavia, não se contentaria com essa perspectiva. Ele almeja uma noção de verdade destituída de qualquer traço temporal. Precisamente, em sua proposta não nos caberia afirmar que uma certa proposição *A se tornou* verdadeira. Tampouco poderíamos dizer que, quando uma demonstração é obtida, tal demonstração *já* existia, tudo isso por causa do elemento temporal envolvido nessas condições. De acordo com ele:

[T]ense should be dropped when speaking about truth and the existence of proofs or grounds, as it usually is when we speak about the existence of numbers. Even a constructivist can use ‘is’ without tense when saying that there is a number with a certain property. Such a use does not bring with it a commitment to holding that for any property, either there is a number with the property or there is not (Prawitz, 2012b, 15).

É válido observar que um ponto crucial envolvido com a temporalidade da verdade se relaciona com a questão da objetividade da matemática. Em última instância, Prawitz (1998, 50) se pergunta como a matemática manteria a sua objetividade no contexto de uma concepção intuicionista. No contexto do realismo (ingênuo), o problema da objetividade não se coloca, pois a verdade de uma proposição não depende da vivência de um sujeito que a evidencie. Tal verdade se deve à própria constituição da realidade, que é independente de quem asseire a proposição. Sem a objetividade, a evidência de uma asserção se daria apenas no âmbito pessoal, e no caso de um embate em torno de asserções opostas, não haveria nada de imparcial a recorrer para que o conflito pudesse ser resolvido. Um desafio que se coloca a um intuicionista, portanto, é manter, por um lado, a objetividade da matemática, mas sem ser realista, e, por outro, justificar uma posição antirrealista, mas sem cair em alguma espécie de subjetivismo.

A via que Dummett parece sugerir é a de que a realidade não existe autonomamente em relação ao conhecimento, no entanto, para que ela não seja uma mera criação nossa, ele oferece a imagem de que tal realidade brotaria à medida que fôssemos bem-sucedidos em verificar a verdade das proposições por nós investigadas, de tal maneira que seríamos forçados a aceitá-la assim que ela fosse surgindo:

It seems that we ought to interpose between the platonist and the constructivist picture an intermediate picture, say of objects springing into being in response to our probing. We do not *make* the objects but must accept them as we find them (this corresponds to the proof imposing itself on us); but they were not already there for our statements to be true or false of before we carried out the investigations which brought them into being (Dummett, 1978, grifo do autor).

¹⁴¹(Dummett, 1998, 131).

Prawitz, porém, traça outro caminho, para justificar a objetividade da matemática nessa fronteira entre platonismo e intuicionismo. De acordo com ele, essa objetividade se encontraria no próprio significado das sentenças que consideramos, de modo que lá já estariam presentes as condições que nos permitiriam confirmar se uma alegada demonstração de fato corresponde à sentença portadora do significado em questão.

Consideremos um matemático se esforçando para encontrar a demonstração da verdade de uma proposição, até que, por fim, ele alega tê-la encontrado. Analisando a demonstração, pode-se verificar que ela de fato serve para justificar que a proposição investigada é verdadeira. Essa verificação só é possível porque nos é claro, antes mesmo da apresentação da demonstração, qual o significado da proposição. Tal significado já deixou estabelecido o que seria demonstrá-la, apesar de não nos dizer como fazê-lo, que seria a tarefa, por excelência, do matemático. É considerando isso que Prawitz afirma:

[T]he question of whether something is a proof is fixed when the meanings are given, that is, when it is given what counts as a canonical proof. From this it is natural to conclude that already, before a proof of a sentence is found, it is determined that there is such a proof. Provability, which I want to identify with truth, becomes in this way something objective (Prawitz, 1998, 50).

Prawitz, portanto, não identifica a verdade de uma proposição com o fato de *ter sido* demonstrada, mas com a condição de *ser demonstrável*, condição essa estabelecida pelo próprio significado da proposição.

Em suma, as propostas intuicionistas há pouco tratadas, ao equacionarem verdade e demonstrabilidade, a fim de não negligenciar a participação de um sujeito cognoscente na construção do saber matemático, acabaram sobrecarregando o conteúdo proposicional, como afirma Prawitz. Em virtude disso, as proposições matemáticas ganharam uma dimensão temporal e empírica que não aparenta condizer com o caráter necessário da ciência a que pertencem. Assumindo que a atribuição de um valor de verdade a uma proposição depende da existência de uma demonstração, a qual é empiricamente construída por um matemático, temos como consequência a estranha condição de que uma proposição demonstrada, ainda que necessária, *não era*, antes da demonstração, verdadeira ou falsa. Levando isso em conta, tentemos agora avaliar os argumentos de Dummett e Prawitz que analisamos há pouco.

A proposta de Dummett aparentemente sugere que, a despeito de uma proposição não possuir um valor de verdade intrínseco antes de ser demonstrada, *quando surge a sua demonstração*, o valor de verdade que lhe é atribuído se propaga para o passado, o que nos permitiria dizer que tal proposição *já era* verdadeira. Contudo, considerando o argumento de Pereira presente no artigo *On the Constructive Notion of Truth and a New Sea-battle Problem*, temos boas razões para refutarmos a proposta de Dummett. Vejamos de perto o argumento.

Pereira começa considerando dois casos em que a verdade vai além de uma asserção justificada, i.e., casos em que demonstração e verdade não se coincidem:

(a) quando se possui um método efetivo capaz de decidir o valor de verdade de

uma proposição, esse valor já está determinado, mesmo que o método não tenha ainda sido executado;

- (b) após uma proposição matemática ter sido demonstrada, não se pode negar que ela já era verdadeira antes do surgimento da sua demonstração, dada a necessidade da sua verdade.

Em ambos os casos há uma ruptura entre o conhecimento e a realidade, algo característico das concepções platonistas: em (a) diríamos “a proposição possui um valor de verdade, apesar de não o conhecermos”; em (b), “a proposição era verdadeira, mas não se sabia”. Vale ainda acrescentar que temos aqui uma dualidade. A verdade se dissocia da noção de demonstração em duas direções temporais, uma que se direciona ao futuro, como em (a), e outra que se direciona ao passado, como em (b).

A partir da condição (b), em que poderíamos dizer que a verdade de uma proposição – depois que a demonstramos – se propaga para o passado, Pereira (2014, 192) reformula o problema da batalha naval, de Aristóteles¹⁴². A reformulação se dá mais ou menos nestes termos: seja S uma conjectura matemática levantada em 1662, mas que só foi demonstrada em 1994. Levando em conta a propagação da verdade para o passado, podemos dizer que S sempre foi verdadeira, mas ninguém sabia disso até o dia em que foi demonstrada, mais de 300 anos depois. Em outras palavras, em 1662, as condições que justificariam a verdade de S não foram realizadas, apesar de já naquela época ela ser verdadeira. Vale observar que uma noção onitemporal de verdade necessária está sendo assumida: a demonstração de uma proposição matemática não implica apenas que a proposição é verdadeira, também implica que ela era verdadeira e sempre será verdadeira.

O ponto crucial do argumento vem agora. De acordo com o princípio C , de Dummett, se uma proposição for verdadeira, então deve existir algo na realidade em virtude do qual se dá a sua verdade. Um intuicionista, para não contrariar sua conduta epistemológica, toma esse algo na realidade como sendo a demonstração da verdade da sentença, não um fato matemático independente do conhecimento. Mas se S não possui uma demonstração em 1662, a qual garantiria a realização do princípio C , isso quer dizer que S não era verdadeira naquela data, o que nos coloca em confronto com o princípio de não contradição, ou seja: S , em 1662, é verdadeira, dada a propagação da verdade para o passado ocasionada pela demonstração de 1994, e não é verdadeira, dada a não realização do princípio C . Temos assim uma batalha naval às avessas, que pode ser sumariada no seguinte quadro, que a compara com o argumento da batalha naval aristotélico:

Batalha Naval	Nova Batalha Naval
Tempo futuro	Tempo passado
Sentenças contingentes	Sentenças necessárias
Princípio de bivalência	Princípio de não contradição

¹⁴²Numa palavra, o problema aristotélico da batalha naval é um argumento para refutar a ideia de que a necessidade do princípio lógico de bivalência implica a não contingência das ações futuras.

Note-se que na batalha naval de Aristóteles uma noção intuitiva, a contingência do futuro, nos faz repensar um princípio lógico, a bivalência; na nova batalha naval, um princípio lógico, a não contradição, nos faz repensar uma noção intuitiva, a onitemporalidade das verdades necessárias.

E quanto à proposta de Prawitz, seria possível sustentá-la? Tentaremos elucidar essa questão por meio da filosofia de Martin-Löf.

Na Teoria Intuicionista de Tipos (TIT) de Martin-Löf, compreendemos uma proposição A quando temos compreensão do que seria a sua prova – ou para sermos mais específicos à TIT, quando sabemos o que seria o seu objeto-prova. Dessa forma, a uma proposição A podemos associar o tipo $prova(A)$, habitado pelos objetos-prova que verificam A . Isso condiz com a seguinte concepção: existindo uma prova de A , pode-se concluir que A é verdadeira; ou então: a *asserção* da verdade de A se dá a partir da existência de uma prova de A . Assim, legitimamos esta equação:

$$A \text{ proposição } A \text{ é verdadeira} = prova(A) \text{ existe.}$$

Dessa forma, $prova(A)$ existe desde que tenhamos a posse de uma de suas instâncias, i.e., de um dos elementos que o habita. Dizendo de outra maneira, *asserir* a verdade de uma proposição pressupõe a posse de um objeto-prova que realiza as condições de prova delimitadas pela proposição¹⁴³.

E como Martin-Löf observa, esse existencial não é o existencial quantificacional:

[T]he notion of existence that enters here is the traditional philosophical notion of existence of a concept, or existence of an essence, if you prefer, where by saying that a concept has existence I mean that there exists an object which falls under the concept. So to say that a proposition is true is the same as to say that the concept proof of the proposition has existence in the traditional philosophical sense (Martin-Löf, 1991, 141).

Ou seja, se de fato possuímos uma prova a de A , que pode ser um método efetivo de verificação ainda não executado, então A é verdadeira. Por isso a inferência abaixo é correta:

$$\frac{a : prova(A)}{A \text{ é verdadeira}}$$

Martin-Löf reconhece a dificuldade do que vimos tratando, qual seja, quando a noção de demonstração se envolve com a de verdade, deve-se estranhamente admitir que uma proposição necessária *se torna* verdadeira:

[I]t has often been pointed out that it is very counter-intuitive to say that a proposition *becomes true* when it is proved, and it has often been held against the intuitionists that they construe the notion of truth in that way (Martin-Löf, 1991, 142, grifo nosso).

Sua maneira de lidar com esse problema consiste em distinguir duas noções de existência de uma prova: essa existência pode ser atual ou potencial. E dado que a existência de uma prova implica a verdade de uma proposição, seguem-se duas

¹⁴³(Martin-Löf, 1994, 94).

noções de verdade proposicional: uma proposição pode ser atualmente verdadeira ou potencialmente verdadeira. Quando se diz que uma proposição é atualmente verdadeira, isso significa que ela foi provada ou que a asserção (ou juízo) *A é verdadeira* foi demonstrada ou, ainda, que uma prova de *A* – i.e., um objeto-prova – foi construída. Tudo isso equivale a dizer que *sabemos* que *A* é verdadeira. Por outro lado, “to say that *A* is potentially true is to say that *A* can be proved, that is, that a proof of *A* can be constructed, which is the same as to say, in usual terminology, simply that *A* is true”¹⁴⁴.

Precisamos, no entanto, ter cautela com a expressão *A é verdadeira*. Repare-se que Martin-Löf diz “em terminologia usual”, o que quer dizer que, nesse caso, não se está especificamente falando da forma de juízo da TIT *A é verdadeira*, que, pela sua força assertiva e categórica, compromete-se com a existência *atual* de uma prova de *A*. Assim, *em terminologia usual*, quando enunciamos *A é verdadeira*, comprometemo-nos apenas com a existência potencial de uma prova de *A*. Ademais, tendo em vista que na ordem de prioridade conceitual o que é atual precede o que é potencial¹⁴⁵, se de fato possuímos uma prova de *A*, além de podermos dizer que *A* é atualmente verdadeira, também temos o direito de dizer que *A* é potencialmente verdadeira, apesar disso introduzir uma ambiguidade desnecessária.

Isso nos permite compreender por que Martin-Löf considera correta a seguinte regra de inferência¹⁴⁶:

$$\frac{A \text{ é verdadeira}}{(A \text{ é verdadeira}) \text{ é demonstrável}},$$

mas não se sente confortável¹⁴⁷ com o princípio *K* (que provavelmente está para *knowability*) de Dummett:

K: se um enunciado for verdadeiro, deve ser em princípio possível saber que ele é verdadeiro.

Considerando que, para Martin-Löf, a demonstração de uma asserção implica *conhecer* o que está sendo asserido, a regra de inferência acima é equivalente a esta:

$$\frac{A \text{ é verdadeira}}{\text{É possível saber que } A \text{ é verdadeira.}}$$

Nesse sentido, também poderíamos reescrever, na terminologia de Martin-Löf, o princípio *K*:

K': se uma proposição for verdadeira, então sua verdade é demonstrável.

¹⁴⁴(Martin-Löf, 1991, 142).

¹⁴⁵Tudo o que é atual é possível, cf. (Martin-Löf, 1991, 142).

¹⁴⁶(Martin-Löf, 1996, 28).

¹⁴⁷(Martin-Löf, 998b, 106).

O desconforto que esse princípio provoca em Martin-Löf diz respeito ao fato de se tratar de um condicional, pois pode ser o caso de que a afirmação presente no antecedente não seja categórica. Logo, da mera hipótese de que uma proposição é verdadeira não podemos concluir que a sua prova existe¹⁴⁸. No entanto, se temos uma asserção categórica de que uma proposição é verdadeira, como na premissa da regra inferencial acima, é porque temos condições de apresentar uma prova que evidencie tal verdade. Em razão disso, Martin-Löf propõe a seguinte correção do princípio *K*:

K'': se o juízo da forma ‘*A* é verdadeira’ for correto, então a proposição *A* pode ser conhecida como verdadeira.

Prawitz (2012a, 57) alega que, nesses termos, o princípio *K* se reduz a uma trivialidade, dado que “correto”, na análise de Martin-Löf, significa conhecível. Acreditamos, no entanto, que essa retificação tem apenas o objetivo de esclarecer que a mera *suposição* da verdade de uma proposição não nos dá o direito de concluir que possuímos a sua prova, i.e., que *sabemos* que ela é verdadeira. Além do mais, *K''* exprime o que a regra inferencial acima diz, e, afinal, qual regra inferencial não comporta um sentido trivial?

Mas retomemos nosso problema inicial: como a distinção entre proposições atualmente e potencialmente verdadeiras pode lidar com a condição contraintuitiva de uma proposição matemática *se tornar* verdadeira quando provada? Para Martin-Löf, quando esse tipo de objeção é feita, leva-se em consideração somente uma noção atualista de existência de uma prova, e como a verdade de uma proposição está associada à existência de sua prova, uma proposição só pode ser verdadeira *a partir do momento* que sua prova passa a existir. Sua sugestão consiste então em apelar a uma noção potencial da verdade, de modo que não mais dizemos que uma proposição se tornou verdadeira, e sim que sua verdade foi atualizada. Ou seja, a verdade de uma proposição, que já lhe era inerente em estado potencial, porque a existência de sua prova sempre lhe foi possível, apenas se atualiza. Vejamos a citação abaixo:

[T]here is not only the notion of actual truth, but also the notion of potential truth, and that, even before the proposition was proved, it could be proved, which is to say that, although not yet actually true, it was potentially true. Thus the notion of potential truth is not tensed in the way the notion of actual truth is. On this analysis of the

¹⁴⁸Esse ponto está por trás da controvérsia acerca da legitimidade do seguinte axioma, que procura capturar uma das características do Sujeito Criador, um artifício criado por Brouwer (1975c) a fim de elucidar o intuicionismo: $A \rightarrow (\exists x : \mathbb{N})(\Sigma \vdash_x A)$, que pode ser lido como: se *A* for verdadeira, então existe um estágio $x : \mathbb{N}$ no qual o sujeito criador possui a sua prova. Levando em conta que o axioma se trata de uma implicação, a verdade de *A* pode ser meramente hipotética, ou seja, não é possível garantir que o sujeito criador *possui* alguma construção que lhe permita *conhecer* a verdade de *A*. Tratando-se de uma suposição, pode ser o caso de *A* ser de fato falsa, o que impossibilitaria a demonstração de sua verdade em qualquer estágio que seja. Nessas condições, a validade do axioma só seria legítima quando o antecedente fosse categórico, pois, dado o envolvimento entre prova e verdade no intuicionismo, realmente haveria uma prova de *A*, a qual teria sido obtida em algum estágio da atividade matemática do sujeito criador (cf. (Sundholm, 2014, 19)).

notion of truth, potential truth, that is, it is clear that there are no propositions which are true but which cannot be proved; because potential truth is simply analyzed as potential existence of proof (Martin-Löf, 1991, 142).

Nessas condições, Martin-Löf parece cumprir com o que Prawitz caracterizou como uma noção atemporal e abstrata de existência de uma prova, porque pode-se dizer de uma proposição arbitrária que a sua prova sempre (no sentido de atemporalidade) existiu num estado potencial. Consequentemente, toda proposição é potencialmente verdadeira, independentemente de sua verdade ser ou não atualizada. Note-se que assim o argumento da nova batalha naval não se aplica, pois a validade do princípio *C* seria garantida pela existência potencial de uma prova.

Ademais, vale ressaltar – pois podemos ser facilmente induzidos a esse ponto – que a existência potencial de uma prova não se reduz à potencialidade relacionada à execução de um método efetivo. A passagem a seguir aparenta atestar que o sentido de potência em “*A* pode ser provada” não é o vinculado ao de posse de um método de decisão. Dizendo de outro modo, a proposição *A* não precisa ser decidível. A noção de potência ali empregada está mais próxima ao que chamamos na seção passada de *verificabilidade ideal* do que à noção de *verificabilidade efetiva*, que é menos abrangente:

[I]n the definition of potential truth, we cannot change the words *A* can be proved into *A* has been, is being or will be proved, that is, will be proved at some time in the course of history, because the conceptual relation between saying that something has been, is being or will be done and saying that it can be done is that we have an entailment in the direction, If something has been, is being or will be done, then it can be done, but not in the converse direction (Martin-Löf, 1991, 143).

Se Martin-Löf estivesse falando da posse de um método efetivo, não se poderia negar que uma proposição que tivesse como prova a execução desse método seria provada em algum momento no curso da história, ou seja, poder-se-ia legitimamente interpretar “*A* pode ser provada” como “*A* foi, está sendo ou será provada”.

E quanto à potencialidade envolvida na noção de verificabilidade efetiva, é preciso que o método efetivo de verificação que a garante seja executado, i.e., é preciso que ele *de fato* retorne um valor? De acordo com Martin-Löf, podemos relacionar essa questão ao que Lovejoy chama de princípio de plenitude, o qual diz que toda possibilidade será atualizada no curso do tempo. A negação desse princípio consiste em afirmar que não é necessário que tudo que é possível deva existir de modo atual. Como Martin-Löf não vê “nenhuma base para esse princípio”¹⁴⁹, nada nos impede de assumir que, para ele, a potencialidade relacionada à verificabilidade efetiva, ou à noção de prova não canônica, não exige a execução factual do método efetivo envolvido.

Pelo exposto, a impressão que fica, mais uma vez, é que a tentativa de dissociar as noções de demonstração e verdade – a fim de que esta adquira um caráter abstrato e atemporal – nos deu todos os ingredientes para que compuséssemos uma compreensão realista dessas noções. A maneira como a noção de potência foi interpretada, tal qual se apresenta no enunciado “*A* pode ser provada”, parece

¹⁴⁹(Martin-Löf, 1991, 143).

expressar a noção de *verificabilidade ideal*, investigada na seção passada. Entendida dessa forma, uma proposição pode ser verdadeira não porque ela pode ser atualmente provada, mas porque ela pode *em princípio* ser provada. No entanto, de acordo com a análise fenomenológica que efetuamos acima, a verificabilidade ideal só é válida num domínio cuja intencionalidade o caracteriza como objetivamente completo, que é justamente a característica fundamental do platonismo:

An assertion is *true-in-itself* (resp. *false-in-itself*) if it is meaningful, both syntactically and semantically; [...] But with an important proviso, assertions must refer to domains of being that are already fully determined in themselves, domains that I called objectively complete. Only under this presupposition, all meaningful assertions can ideally be clarified¹⁵⁰.

[...] If, on the contrary, a domain is conceived as objectively incomplete, depending for its completion on the action of a subject, there is no place for the notion of intrinsic truth. Truth is either experienced or not at all (da Silva, 2017, 88-89, grifo do autor).

Em outras palavras, a menos que uma proposição se refira a um domínio objetivamente completo, não estamos justificados em lhe atribuir um valor de verdade intrínseco, que corresponderia à noção proposta por Martin-Löf de proposição potencialmente verdadeira.

Gostaríamos de observar, contudo, que a existência de um domínio objetivamente completo não é uma condição suficiente para haver um realismo semântico – i.e., qualquer proposição possui um valor de verdade intrínseco –, apesar de ser uma condição necessária. Estaria então Martin-Löf, sobretudo ao atribuir um caráter ontológico aos objetos-prova, propondo uma forma de intuicionismo em que temos, de um lado, um realismo ontológico, mas, de outro, um antirrealismo semântico? Podemos constatar nesta citação que os objetos-prova (ou provas, simplesmente) são compreendidos ontologicamente, entidades em virtude das quais uma proposição pode ser dita verdadeira:

[T]he intuitionist, or verificationist, notion of truth is really a version of the correspondence notion of truth, truth as agreement with reality: the only novelty is that we call that thing in reality, or in the world, which has to be there in order for the proposition to be true, its proof, or verification (Martin-Löf, 998b, 112).

A partir disso, poderíamos entender que há um domínio objetivamente completo de objetos-prova, referência de toda proposição verdadeira, de modo que, para uma proposição arbitrária *A*, existe ou não existe um objeto-prova que a verifique. Esse domínio, além de garantir a verdade potencial de *A*, invalidaria o argumento da nova batalha naval: os objetos-prova sempre estiverem disponíveis, ou melhor, a referência de uma proposição verdadeira, como demanda o princípio *C*, pré-existe à atualização da verdade dessa proposição.

Mas se a verdade de uma proposição se deve à existência de seu objeto-prova, afirmar que, para qualquer proposição, seu objeto-prova existe ou não existe não equivale a se comprometer com um realismo semântico? Ademais, isso não validaria o princípio lógico de bivalência, marcador fundamental da distinção entre platonismo e intuicionismo? A concepção semântica da TIT não permite uma resposta positiva a essas duas questões. Para se afirmar um juízo da forma *A* é

¹⁵⁰I.e., idealmente provada (nota nossa).

verdadeira, é preciso *conhecer* o objeto-prova que realize as condições estabelecidas pelo sentido da proposição *A*: “to have the right to make a judgement of the form ‘*A* is true’, you must know a proof of *A*”¹⁵¹. Desse modo, o princípio de bivalência apenas seria válido se conhecêssemos, para uma proposição arbitrária *A*, um objeto-prova de $A \vee \sim A$, que, de acordo com o sentido da disjunção, equivale a conhecermos o objeto-prova de pelo menos um dos disjuntos, contudo isso nem sempre é o caso¹⁵².

Prawitz sugere essa interpretação para a teoria intuicionista de tipos, em que, poderíamos dizer, alia-se um realismo ontológico a um antirrealismo semântico:

Adopting this new view of proof-objects, Martin-Löf definition of truth in terms of them does not any longer make “intuitionism into an idealistic philosophy in the knowledge theoretical sense”. On the contrary, it brings his new position close to, or at least closer to, realism. Asked what the proof-objects are after their epistemic connections have been severed, Martin-Löf and Sundholm often answer that they are just *truth-makers* (Prawitz, 2012a, 59, grifo do autor).

Apesar dessa interpretação solucionar os problemas que temos discutido, não acreditamos que seja fidedigna ao intuicionismo de Martin-Löf. Não é correto afirmar que, de acordo com a TIT, haja um domínio objetivamente completo de objetos-prova. Ocorre que Martin-Löf distingue entre demonstrar um juízo e provar uma proposição. Um juízo da forma *A é verdadeira* é demonstrado por um encadeamento de inferências onde se *evidencia a construção* de um objeto-prova que verifica a proposição *A*. Ou seja, os objetos-prova não habitam um domínio objetivamente completo e independente, pois são construídos por meio de uma demonstração, atividade que se caracteriza por trazer evidências a um sujeito cognoscente.

Assim sendo, temos que admitir que a condição temporal de uma proposição se tornar verdadeira é algo inerente ao intuicionismo, o que traria consigo todas as suas consequências contraintuitivas? Acreditamos que não, e a solução para isso, se estivermos corretos, encontra-se na maneira em que a teoria intuicionista de tipos compreende o sentido proposicional.

Na TIT, temos os juízos de formação. Por conseguinte, antes de termos o direito de asserir *A é verdadeira*, o juízo de formação *A é uma proposição* já deve ter sido feito, i.e., ele entra como premissa da conclusão que assera a verdade de *A*. Para termos o direito de asserir *A é uma proposição*, devemos saber o que seria um objeto-prova de *A*, pois é esse conhecimento que nos permite compreender o sentido de *A*, ou seja, que nos permite saber que *A* é uma proposição. Outra peculiaridade da TIT é que proposições podem ser vistas como tipos, i.e., tipos habitados por objetos-prova que verificam a proposição associada ao tipo que habitam. Assim, temos algo semelhante ao que falamos na seção passada sobre significatividade semântica. Vimos que a proposição “o número 2 é verde” não é semanticamente significativa porque há uma incompatibilidade a priori entre tipos ontológicos. Também vimos que uma sentença sintaticamente e semanticamente

¹⁵¹(Martin-Löf, 998b, 112).

¹⁵²Cf. (Prawitz, 2012a, 61).

significativa é capaz de exprimir uma situação a priori possível, isso se devendo tão somente à compatibilidade entre os tipos ontológicos que constituem a sua significatividade semântica. Por essa razão que a proposição “175 é um número primo”, apesar de ser necessariamente falsa, pode (num sentido mais fraco de possibilidade) ser verdadeira. E aqui chegamos ao ponto que gostaríamos de propor: quando asserirmos *A é uma proposição*, delimitamos a compatibilidade dos tipos requeridos pelo sentido de *A*, para os quais devemos investigar a construção de um objeto-prova que os instancie. É essa compatibilidade de tipos, instaurada assim que compreendemos o sentido de *A*, que nos permite dizer que *A* pode ser verdadeira (ou que *A* pode ser provada).

Usando o argumento da nova batalha naval para testar a nossa interpretação, dizemos: independentemente de quando ocorre uma prova, no momento em que uma proposição é feita, ou conjecturada, diríamos, estabelece-se uma compatibilidade de tipos, determinando a priori que a proposição em questão pode ser provada. Ou seja, uma proposição se torna verdadeira porque construímos um objeto-prova que a verifica, no entanto, devido somente ao sentido da proposição, a construção desse objeto-prova já era possível, i.e., já havia a possibilidade da proposição ser verdadeira. E tudo isso sem recorrermos a uma concepção platônica de entidades pré-existentes. Até mesmo os tipos ontológicos só existem porque as proposições existem, as quais são *construídas* pelos juízos de formação da TIT. Nessas condições, no que diz respeito à passagem do tempo, talvez o mais importante a questionar é se a proposição provada é a mesma conjecturada tempos atrás.

Assim, se lermos à luz da TIT a noção de sentido proposta por Prawitz, ela parece sustentar-se diante das dificuldades ocasionadas por uma noção mais abstrata de verdade.

Referências Bibliográficas

- Alves, D. D. P. (2011). Logic is metaphysics. *Principia*, 15(1):31–42.
- Brouwer, L. (1975c). Essentially negative properties (1948a). In Heyting, A., editor, *Collected Works*, pages 478–479. North-Holland, Amsterdam.
- Brouwer, L. (1975e). The effect of intuitionism on classical algebra of logic (1955). In Heyting, A., editor, *Collected Works*, pages 551–554. North-Holland, Amsterdam.
- Brouwer, L. (2011). Historical introduction and fundamental notions. In van Dalen, D., editor, *Brouwer’s Cambridge Lectures on Intuitionism*, chapter 1, pages 1–19. Cambridge University Press, Cambridge.
- da Silva, J. J. (2011). On the principle of excluded middle. *Principia*, 15(2):333–347.

- da Silva, J. J. (2017). *Mathematics and Its Applications: A Transcendental-Idealist Perspective*. Springer, Switzerland.
- Dummett, M. (1978). Wittgenstein's philosophy of mathematics. In Dummett, M., editor, *Truth and Other Enigmas*, chapter 11, pages 166–185. Harvard University Press, New York.
- Dummett, M. (1987). Reply to Dag Prawitz. In Taylor, B., editor, *Michael Dummett: Contributions to Philosophy*, chapter 9(E), pages 281–286. Springer, Netherlands.
- Dummett, M. (1998). Truth from the constructive standpoint. *Theoria*, 64(2-3):122–138.
- Husserl, E. (2008). *Logical Investigations Volume I*. Routledge, New York.
- Martin-Löf, P. (1991). A path from logic to metaphysics. In Corsi, G. e Sambin, G., editors, *Atti del Congresso Nuovi Problemi della Logica e della Filosofia della Scienza, Viareggio, 8-13 gennaio, 1990*, pages 141–149. CLUEB, Bologna.
- Martin-Löf, P. (1994). Analytic and synthetic judgements in type theory. In Parrini, P., editor, *Kant and contemporary epistemology (1992)*, pages 87–99. Kluwer, Dordrecht.
- Martin-Löf, P. (1996). On the meaning of the logical constants and the justification of the logical laws (1983). *Nordic Journal of Philosophical Logic*, 1(1):11–60.
- Martin-Löf, P. (1998b). Truth and knowability: on the principles C and K of Michael Dummett (1995). In Dales, H. e Oliveri, G., editors, *Truth in Mathematics*, chapter 5, pages 105–114. Clarendon Press, New York.
- Pereira, L. (2014). On the constructive notion of truth and a new sea-battle problem. In Schuback, M. e Pereira, L., editors, *Time and Form: Essays on Philosophy, Logic, Art, and Politics*, pages 183–196. Axl Books, UK.
- Prawitz, D. (1998). Truth and objectivity from a verificationist point of view. In Dales, H. e Oliveri, G., editors, *Truth in Mathematics*, chapter 2, pages 41–52. Clarendon Press, New York.
- Prawitz, D. (2012a). Truth and proof in intuitionism. In Dybjer, P., Lindström, S., Palmgren, E., e Sundholm, G., editors, *Epistemology versus Ontology: Essays on the Philosophy and Foundations of Mathematics in Honour of Per Martin-Löf*, pages 45–67. Springer London, Limited, Dordrecht, Heidelberg, New York, London.
- Prawitz, D. (2012b). Truth as an epistemic notion. *Topoi*, 31(1):9–16.

- Raatikainen, P. (2004). Conceptions of truth in intuitionism. *History and Philosophy of Logic*, 25:131–145.
- Sundholm, G. (2014). Constructive recursive functions, Church's thesis, and Brouwer's theory of the creating subject: Afterthoughts on a parisian joint session. In Dubucs, J. e Bourdeau, M., editors, *Constructivity and Computability in Historical and Philosophical Perspective*, pages 1–36. Springer Netherlands, Amsterdam.
- Tieszen, R. (1989). *Mathematical Intuition: Phenomenology and Mathematical Knowledge*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.
- Tieszen, R. (2005). *Phenomenology, Logic, and the Philosophy of Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge.
- Tieszen, R. (2010). Mathematical realism and transcendental phenomenological idealism. In *Phenomenology and Mathematics*, chapter 1, pages 1–22. Springer, Dordrecht.
- Tragesser, R. (1977). *Phenomenology and Logic*. Cornell University Press, Ithaca and London.