

Modelación matemática para cuantificar la respuesta sísmica de un edificio aislado

Miguel Tornello & Roberto Aguiar Falconi & Carlos Frau

Resumen

En la República Argentina, las provincias de Mendoza y San Juan, constituyen los centros urbanos socio-económicos más importantes del oeste argentino. Con aproximadamente 2.5 millones de habitantes constituyen las áreas más densamente pobladas de la región oeste del país. Estudios realizados sobre la sismicidad local y regional han demostrado el elevado peligro sísmico de ambas provincias. La zona del Gran Mendoza presenta una historia sísmica importante. En los últimos 200 años ocurrieron al menos 15 terremotos que ocasionaron daños en las construcciones. El antecedente histórico más importante lo constituye el terremoto de 1861 que provocó la destrucción total de la ciudad y ocasionó la muerte del 60% de las personas. Los antecedentes indican la necesidad de contar con nuevos desarrollos tecnológicos que tiendan a reducir y controlar los efectos de los terremotos destructivos sobre las construcciones emplazadas en las regiones mencionadas. En el presente trabajo se desarrolla un modelo matemático para evaluar la respuesta de un edificio de tres niveles de mampostería y hormigón armado con aislamiento en su base. El modelo matemático permite predecir los desplazamientos a nivel de los dispositivos de aislamiento, aceleraciones y desplazamientos en la superestructura. El modelo desarrollado permite predecir con una buena aproximación las repuestas del edificio aislado. Finalmente el trabajo se completa con información sobre la respuesta del edificio ante sismos sensibles ocurridos en la región.

Palabras claves: modelos numéricos, conocimiento científico, aislamiento sísmico, repuestas estructurales.

1. Introducción. El modelo científico

En las ciencias puras y las aplicadas el modelo científico es una representación abstracta, conceptual, gráfica o visual, física, de fenómenos, sistemas o procesos a fin de analizar, describir, explicar, simular (explorar, controlar y predecir los fenómenos o procesos), es decir que un modelo permite determinar un resultado final a partir de una determinada información, por lo tanto la creación de un modelo es una actividad esencial de todo proceso científico.

Un modelo de las ciencias físicas es una traducción de la realidad física de un sistema físico en términos matemáticos, es decir, una forma de representar cada uno de los tipos entidades que intervienen en un cierto proceso físico mediante objetos matemáticos. Las relaciones matemáticas formales entre los objetos del modelo, deben representar de alguna manera las relaciones reales existentes entre las diferentes entidades o aspectos del sistema u objeto real. Una vez traducido o representado cierto problema en forma de modelo matemático, se pueden aplicar el cálculo, el álgebra y otras herramientas matemáticas para deducir el comportamiento del sistema bajo estudio. Entonces un modelo físico requerirá que se pueda seguir el camino inverso al modelado, permitiendo reinterpretar en la realidad las predicciones del modelo.

El empleo de un modelo implica plantear una serie de hipótesis, de manera que lo que se quiere estudiar esté plasmado en la representación, sin embargo también se busca que sea lo suficientemente sencillo para poder ser estudiado y desarrollado.

En términos generales un modelo consta de: i) reglas de representación del input y el output. Dichas reglas permiten construir, partiendo de una realidad física, definir un conjunto de datos de entrada o input, a partir de los cuales el modelo proporcionará un output o resultado final, que también será una interpretación del efecto de las condiciones iniciales elegidas sobre la realidad física; ii) estructura interna que dependerá del tipo de modelo. Esta estructura permite definir una correspondencia entre el input y el output. Un modelo es determinista si al mismo input le corresponde el mismo output y no determinista si al mismo input pueden corresponderle diferentes outputs.

Los modelos suelen clasificarse por su estructura interna más que por los detalles formales del input, el output o la forma de representación. Sobre esa base de estructura interna los modelos se clasifican en: a) modelos físicos: representación a escala de algún objeto de interés que permite su

examen en diferentes circunstancias; b) modelos matemáticos: representa fenómenos o relaciones entre ellos a través de una formulación matemática, los cuales pueden ser deterministas (datos empleados o fenómenos conocidos), estocásticos (el resultado es una probabilidad), numéricos (realidad física y condiciones iniciales se representan mediante un conjunto de números, a partir de los cuales se calculan otros resultados numéricos que reflejan cierto efecto de las condiciones iniciales. Todos esos modelos permiten experimentar a través de simulaciones (Martinez M., 1997).

Existen otros modelos tales como los gráficos, analógicos y conceptuales que permiten predecir respuestas en distintas especialidades de la ciencia.

Modelar significa crear una representación explícita del entendimiento que una persona tiene de una determinada situación, reproducir de manera simplificada la realidad, para descubrir y estudiar nuevas relaciones y cualidades del objeto de estudio, la habilidad para describir la situación problemática que confronta un analista, utilizar una abstracción que sirve para explicar la realidad y elaborar un modelo para interpretar la realidad objetiva y transformarla en beneficio propio.

La modelación, como uno de los métodos teóricos más importantes para la ciencia, es justamente el proceso mediante el cual se utilizan modelos con vistas a investigar la realidad. Es el método que opera en forma práctica o teórica con un objeto, no en forma directa, sino utilizando cierto sistema intermedio, auxiliar, natural o artificial. El modelo viene siendo como un sustituto del objeto de investigación. El modelo es una reproducción que esquematiza las características de la realidad situación que posibilita su investigación. El modelo debe cumplir determinado nivel de similitud estructural y funcional con la realidad, de manera que permita extrapolar los datos obtenidos con el fenómeno estudiado.

Cualquier modelo teórico tiene la finalidad no sólo de explicar procesos o hechos conocidos que se plantearon en el problema, sino pronosticar los desconocidos. Su capacidad predictiva depende en buena medida de su coherencia lógica; mientras más conclusiones puedan derivarse del modelo mayor es su capacidad de predicción (Fuentes et. al, 1998).

El planteo del modelo y su desarrollo supone dos alternativas diferentes: i) el entendimiento del modelo como unidad de sus dimensiones o subsistemas teórico, metodológico y práctico. En este caso, su vía de concreción es parte del modelo; ii) la comprensión del modelo como construcción teórica y de su instrumento como vía de implementación en la

práctica del mismo a través de una metodología, propuesta metodológica, estrategia pedagógica, alternativa didáctica, sistema de tareas, sistema de ejercicios u otra variante que se estime conveniente implementar en la investigación.

En el presente trabajo se muestra un modelo matemático para predecir la respuesta de un edificio aislado sujeto a la acción de terremotos destructivos. Un modelo matemático describe teóricamente un objeto que existe fuera del campo de las matemáticas. Las previsiones del tiempo y los pronósticos económicos, por ejemplo, están basados en modelos matemáticos sin embargo, su éxito o fracaso depende de la precisión con la que se construya esta representación numérica, la fidelidad con la que se concreten hechos y situaciones naturales en forma de variables relacionadas entre sí.

La utilidad de estos modelos radica en que ayudan a estudiar cómo se comportan estructuras complejas frente a aquellas situaciones que no pueden verse con facilidad en el ámbito real. Puede decirse que los modelos matemáticos son conjuntos con ciertas relaciones ya definidas, que posibilitan la satisfacción de proposiciones que derivan de los axiomas teóricos. Para ello, se sirven de diversas herramientas, como ser el álgebra lineal que, por ejemplo, facilita la fase de análisis, gracias a la representación gráfica de las distintas funciones.

Fourez (2006) expresa que los modelos científicos se pueden ver no como una representación del mundo, como una representación de nuestro campo de acción posible en el mundo. Por otra parte, Díaz et al. (2005) plantean que en algún momento ubicado probablemente en la ciencia del siglo XIX, la palabra modelo vino a significar lo opuesto de prototipo o ejemplar para ser copiado; es decir, pasó a designar la copia de algo. En efecto, el modelo científico es una copia o, para ser más precisos, un símil de objetos y procesos. Una copia podría ser una fotografía, y una foto no es un modelo. El mismo autor, concluye que el modelo científico es entonces un símil en el sentido preciso de que entraña una comparación de naturaleza simbólica y expresa una semejanza.

No obstante, Díaz (2009) define los modelos de una forma más técnica, cómo un instrumento de la investigación de carácter material o teórico, creado por lo científicos para reproducir el fenómeno que se está estudiando; además, afirma que es una reproducción simplificada, que cumple una función heurística, ya que permite descubrir y estudiar nuevas relaciones y cualidades del objeto de estudio.

En el presente trabajo se muestra, como ejemplo, un modelo matemático desarrollado para predecir la respuesta de un edificio con aislamiento sísmico de base sujeto a la acción de terremotos destructivos. Los modelos matemáticos son muy utilizados por las distintas ingenierías, en este caso particular, la ingeniería civil para predecir el comportamiento (respuesta) de hechos físicos. Los modelos en general han tenido un impulso importante en los últimos años apoyados fundamentalmente por el desarrollo tecnológico, computacional y de los métodos numéricos.

2. Modelo matemático simplificado

Con el objeto de evaluar la respuesta de la estructura aislada, se presenta un modelo simplificado de análisis sísmico de estructuras con aisladores de base compuestos por resortes helicoidales de acero instalados junto a amortiguadores viscosos (Tornello y Sarrazin 2012). Es conocido que la presencia de dispositivos de baja rigidez lateral entre la superestructura y la fundación permite desacoplar las respuestas del edificio de los movimientos del suelo ocasionados por el terremoto. Si además, la rigidez vertical también es baja comparada con la de otros dispositivos comúnmente utilizados en técnicas de aislamiento, es posible, simultáneamente, desacoplar la componente vertical del terremoto. El método numérico, que responde a un modelo matemático definido, permite obtener las respuestas en el tiempo del edificio aislado cuando el propio edificio está sujeto a las tres componentes sísmicas del terremoto.

El modelo considera que la superestructura se desplaza como cuerpo rígido ante la acción de un sismo (hipótesis) sin embargo, debido a la presencia de los resortes, los desplazamientos verticales en los extremos del edificio serán de signos contrarios debido al efecto pendular de la respuesta y al mecanismo de disipación de energía (Tornello y Sarrazin, 2007). Es decir, mientras un extremo del edificio aislado asciende, el otro descende, la diferencia de desplazamientos verticales pone de manifiesto el mecanismo de disipación de energía.

Para el análisis de la respuesta sísmica el método numérico considera concentrada la masa en la posición donde se emplazan los resortes helicoidales y el amortiguador viscoso. En cada masa del sistema de aislamiento se consideran tres grados de libertad, dos desplazamientos horizontales y un desplazamiento vertical, como se muestra en la Figura 1. El problema corresponde a una estructura con cuatro dispositivos de control pasivo por lo tanto nótese que primero se han enumerado los grados de

libertad correspondientes a los desplazamientos horizontales en sentido “X”, luego los desplazamientos horizontales en sentido “Y” y finalmente los grados de libertad verticales. Cada dispositivo de control tiene tres rigideces según las direcciones X, Y, Z; como se aprecia a la izquierda de la Figura 2 y tiene tres factores de amortiguamiento viscoso, dos en sentido horizontal y uno en sentido vertical como se observa a la derecha de la Figura 2. Las matrices de rigidez, $\mathbf{K}^{(b)}$ y de masa, $\mathbf{M}^{(b)}$ del modelo propuesto, se indican en las expresiones 1 y 2.

$$\mathbf{K}^{(b)} = \begin{bmatrix} k_{hx} & 0 & 0 \\ 0 & k_{hy} & 0 \\ 0 & 0 & k_{vz} \end{bmatrix} \quad (1)$$

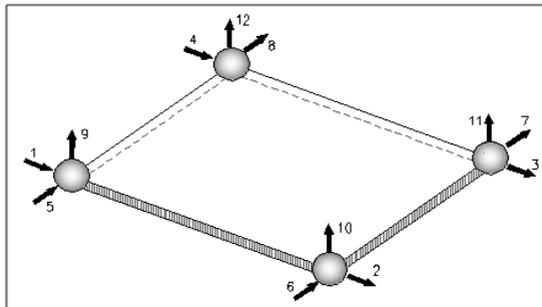


Figura 1 Grados de libertad a nivel del sistema de aislamiento

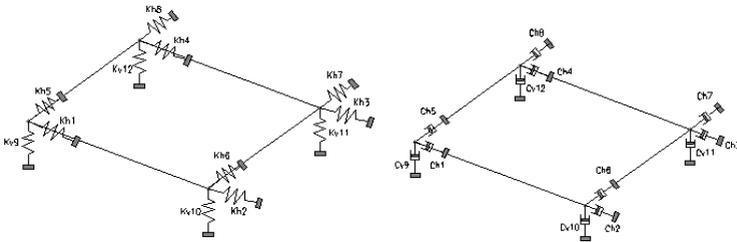


Figura 2 Rigidez y amortiguamiento en la posición de cada aislador y amortiguador viscoso

$$\mathbf{M}^{(b)} = \begin{bmatrix} \mathbf{m}^{(t)} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{m}^{(t)} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{m}^{(t)} \end{bmatrix} \quad (2)$$

En las expresiones anteriores, \mathbf{K}_{hx} , \mathbf{K}_{hy} , \mathbf{K}_{vz} son submatrices diagonales, cuyos elementos son las rigideces de los aisladores en sentido horizontal X, Y, y vertical, respectivamente. En la expresión 2., $\mathbf{m}^{(t)}$ es una submatriz diagonal, compuesta por cada una de las masas discretas. (Aguar F. R., 2007). Con relación al modelo de la Figura 1 y en concordancia con un sistema de aislamiento compuesto por cuatro resortes de acero y cuatro amortiguadores viscosos, \mathbf{K}_{hx} es una submatriz diagonal de cuatro por cuatro, cuyos términos de la diagonal son: \mathbf{K}_{h1} , \mathbf{K}_{h2} , \mathbf{K}_{h3} , \mathbf{K}_{h4} . Los elementos de \mathbf{K}_{hy} son \mathbf{K}_{h5} , \mathbf{K}_{h6} , \mathbf{K}_{h7} , \mathbf{K}_{h8} y los de \mathbf{K}_{vz} son \mathbf{K}_{h9} , \mathbf{K}_{h10} , \mathbf{K}_{h11} , \mathbf{K}_{h12} . Por otro lado, los elementos de la diagonal de la submatriz $\mathbf{m}^{(t)}$ son: \mathbf{m}_1 , \mathbf{m}_2 , \mathbf{m}_3 , \mathbf{m}_4 . Las masas discretas \mathbf{m}_i se obtienen en función del peso total de la superestructura, de la losa por encima de los dispositivos de aislamiento y el peso de cada aislador. La matriz de amortiguamiento $\mathbf{C}^{(b)}$ se obtiene en función de la matriz de masas $\mathbf{M}^{(b)}$ de los modos de vibración (agrupados en la matriz modal Φ) y del amortiguamiento del dispositivo visco elástico (Expresión 3).

$$\mathbf{C}^{(b)} = \mathbf{M}^{(b)} \Phi \hat{\mathbf{C}}^{(b)} \Phi^t \mathbf{M}^{(b)} \quad (3)$$

$\hat{\mathbf{C}}^{(b)}$ es una matriz diagonal compuesta por las submatrices que definen el amortiguamiento del dispositivo viscoso (Expresión 4).

$$\hat{\mathbf{C}}^{(b)} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{C}}_{hx} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \underset{(4)}{\hat{\mathbf{C}}_{hy}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \hat{\mathbf{C}}_{vz} \end{bmatrix}$$

Para el modelo de la Figura 2, los elementos de la diagonal de $\hat{\mathbf{C}}_{hx}$ son $\mathbf{C}_{h1}, \mathbf{C}_{h2}, \mathbf{C}_{h3}, \mathbf{C}_{h4}$. En función del factor de amortiguamiento en sentido horizontal ξ_h , se tiene que los elementos de la diagonal de $\hat{\mathbf{C}}_{hx}$ son $2\xi_h \omega_i \mathbf{m}_i$ para “ i ” de 1 a 4. Siendo ξ_{hi} el factor de amortiguamiento en sentido X asociado al primer modo de vibración; \mathbf{m}_i es la masa discreta i ; ω_i es la frecuencia de vibración para el modo i ; los valores de las submatrices $\hat{\mathbf{C}}_{hy}, \hat{\mathbf{C}}_{vz}$ son similares, es decir, el subíndice i , es modo de vibración para el caso de la frecuencia natural ω y para el factor de amortiguamiento ξ , pero i , también es masa discreta.

Para la dirección Y se trabajará con el factor de amortiguamiento en sentido Y; para la dirección Z, con el factor de amortiguamiento vertical. Cada amortiguador viscoso tiene tres factores de amortiguamiento, dos en sentido horizontal y uno en sentido vertical. El modelo matemático desarrollado considera que la superestructura se mueve como cuerpo rígido en consecuencia, no hay ninguna aceleración que provenga de la superestructura y que actúe en los dispositivos de aislamiento. Por lo tanto, la ecuación diferencial del sistema aislado que se debe resolverse se indica como expresión 5.

$$\mathbf{M}^{(b)} \mathbf{q}^{(b)} + \mathbf{C}^{(b)} \dot{\mathbf{q}}^{(b)} + \mathbf{K}^{(b)} \mathbf{q}^{(b)} = \mathbf{M}^{(b)} \mathbf{J} \ddot{\mathbf{U}}_g \quad (5)$$

Donde $\mathbf{q}^{(b)}, \dot{\mathbf{q}}^{(b)}, \ddot{\mathbf{q}}^{(b)}$, son los vectores de desplazamiento, velocidad y aceleración del sistema de aislamiento. Se hace notar que primero se enumeran todas las coordenadas en sentido X, luego en sentido Y, finalmente en Z, como se indica en la Figura 1. En estas condiciones y cuando solo actúa la acción sísmica en sentido X, el vector $\mathbf{J}^t = [\mathbf{1} \ \mathbf{0} \ \mathbf{0}]$; para sismo en sentido Y el vector $\mathbf{J}^t = [\mathbf{0} \ \mathbf{1} \ \mathbf{0}]$ y para sismo en Z, $\mathbf{J}^t = [\mathbf{0} \ \mathbf{0} \ \mathbf{1}]$. Siendo

1 el vector unitario y **0**, un vector compuesto por ceros. El orden de estos vectores **1** y **0** es igual al número de masas discretas. Con esta consideración la aceleración del suelo $\ddot{\mathbf{U}}_g$ puede ser \ddot{U}_{gx} para sismo en sentido X; \ddot{U}_{gy} para sismo en sentido Y; \ddot{U}_{gz} para sismo en sentido Z.

3. Desplazamientos a nivel de los dispositivos de aislamiento

Con el modelo matemático descrito en el punto precedente es posible determinar la historia de desplazamientos cuando el edificio está sujeto a la acción de terremotos. En la Figura 3 se indican los resultados obtenidos, en términos de desplazamientos horizontales (q_h) a nivel de los dispositivos de aislamiento, para el terremoto de New Hall, estación Fire-Station (1994), mientras que en Figura 4 se observan los desplazamientos verticales (q_v), también a nivel de los dispositivos de aislamiento.

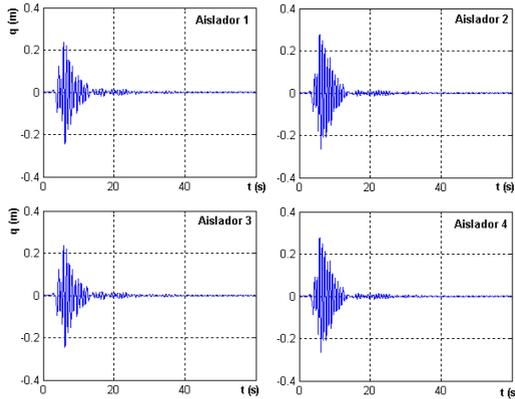


Figura 3 Desplazamientos en dirección X. Terremoto New Hall

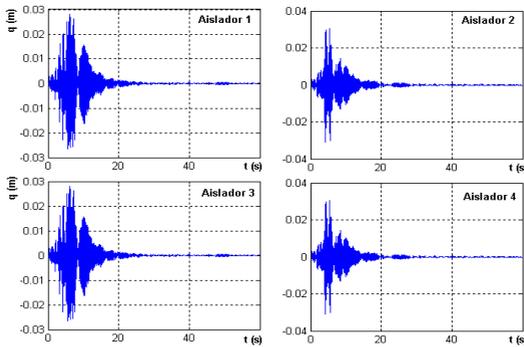


Figura 4 Desplazamientos dirección vertical. Terremoto New Hall

Los aisladores de resortes presentan, como característica distintiva respecto a otros dispositivos frecuentemente utilizados en la protección sísmica, que su rigidez vertical es baja comparada, por ejemplo, con dispositivos del tipo friccionales o elastoméricos. Si se considera al edificio como un cuerpo rígido, apoyado sobre resortes de acero y amortiguadores viscosos, con rigidez horizontal, K_h y vertical K_v el edificio aislado presenta, como mecanismo de disipación de energía, modos pendulares con centros de rotación superior e inferior (Tornello M., 2012). En el mecanismo de disipación de energía, los desplazamientos verticales de los dispositivos de aislamiento de dos aisladores ubicados en un extremo son diferentes a los otros dos ubicados en el extremo opuesto. Es decir que mientras los aisladores ubicados en las posiciones coincidentes con los grados de libertad 9 y 12 suben, los emplazados en las direcciones coincidentes con los grados de libertad 10 y 11 se comprimen. Los grados de libertad han sido indicados en la Figura 1. La diferencia de desplazamientos verticales provoca un movimiento pendular del edificio (Tornello M., 2012). La respuesta obtenida en términos de desplazamientos verticales para el terremoto de New Hall se muestra en la Figura 5.

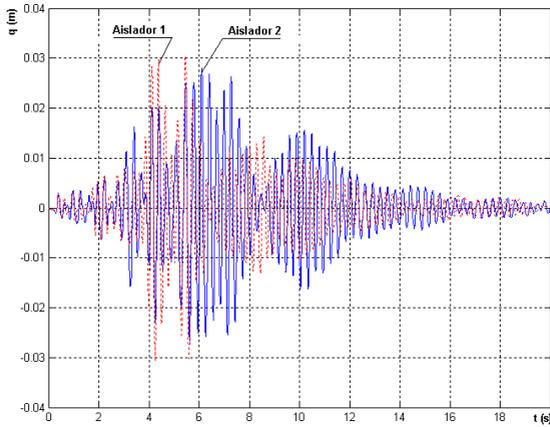


Figura 5 Desplazamientos verticales aisladores 1 y 2 (opuestos entre sí), terremoto New Hall (1994)

4. Modelo tridimensional para evaluar las respuestas en la superestructura

El modelo matemático de análisis admite que las losas de la superestructura son rígidas en el plano horizontal razón por la cual se considera un grado de libertad vertical en cada uno de los nudos de la superestructura. Por otra parte, en función de la hipótesis asumida, se puede admitir que el piso experimenta el mismo desplazamiento horizontal. En la Figura 6 se indican los grados de libertad considerados en la superestructura. Nótese que primero se han enumerado los desplazamientos horizontales de piso y posteriormente los desplazamientos verticales.

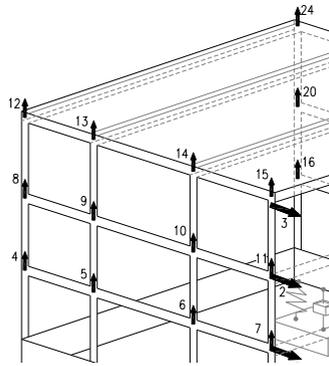


Figura 6 Grados de libertad admitidos en la superestructura

La estructura analizada (Figura 6) tiene 27 grados de libertad (27 desplazamientos), 3 en dirección horizontal en sentido X y 24 en sentido vertical. Estos desplazamientos se agrupan en un vector \mathbf{u} . El modelo es útil para el análisis sísmico de la estructura ante la acción de dos componentes sísmicas, una horizontal en la dirección de los desplazamientos horizontales y otra vertical. Se define al vector transpuesto $\mathbf{u}^t = [\mathbf{u}_x \ \mathbf{u}_z]$ donde \mathbf{u}_x es el vector que contiene a los desplazamientos de piso en sentido horizontal; \mathbf{u}_z el vector que contiene a los desplazamientos de cada nudo en sentido vertical.

Para los dispositivos de aislamiento se han considerado tres grados de libertad en cada dispositivo de control (Figura 7). Primero se han enumerado los desplazamientos en sentido X, luego en sentido Y y finalmente los desplazamientos verticales. Dado que la estructura tiene 4 dispositivos de aislamiento, se tendrán 12 grados de libertad los cuales se los agrupa en un vector \mathbf{q} . El vector transpuesto se define como $\mathbf{q}^t = [\mathbf{q}_x \ \mathbf{q}_y \ \mathbf{q}_z]$. Donde \mathbf{q}_x es un vector compuesto por los desplazamientos en sentido X, \mathbf{q}_y , \mathbf{q}_z vectores conformados por los desplazamientos del sistema de aislamiento en sentido Y, y Z respectivamente.

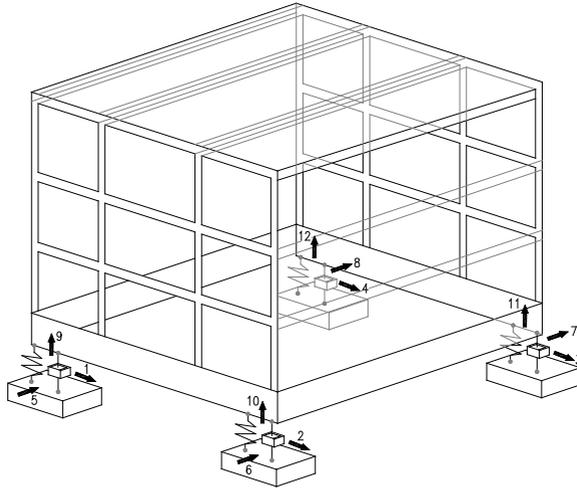


Figura 7 Grados de libertad del sistema de aislamiento

La Figura 8 indica la posición de las masas discretizadas en cada nudo de la superestructura. La numeración de las masas está en concordancia con la numeración de los grados de libertad mostrados en la Figura 6. Primero se enumeran las masas de todo un plano vertical desde el primer piso hasta el último piso, luego la enumeración continúa en el siguiente elemento. En la Figura 9 se indica la discretización de las masas del sistema de aislamiento. Cada una de estas masas se obtiene tomando en cuenta el peso de la superestructura, de la losa ubicada por encima de los dispositivos de aislamiento y de los propios dispositivos de control.

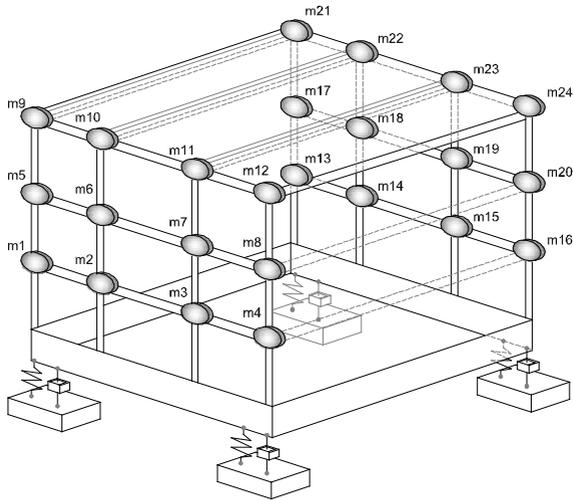


Figura 8 Discretización de las masas en la superestructura

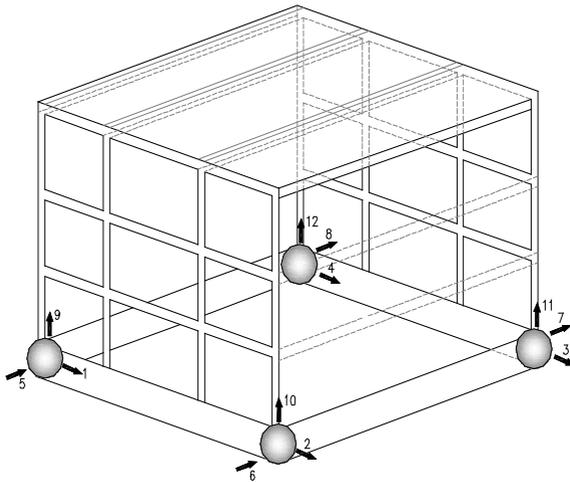


Figura 9 Discretización de las masas a nivel del sistema de aislamiento

5. Planteo matricial de las ecuaciones de movimiento

La matriz de rigidez $\mathbf{K}^{(s)}$ de la superestructura se obtiene a partir de la matriz de rigidez lateral-vertical, \mathbf{K}_{L-V} de cada uno de los planos verticales. En cada plano se considera que la vigas son axialmente rígidas de tal manera de tener un único desplazamiento horizontal por piso y que las columnas son totalmente flexibles. En consecuencia se tiene un desplazamiento horizontal por piso y dos grados de libertad en cada nudo, el desplazamiento vertical y la rotación.

La matriz de rigidez completa del pórtico se determina con los grados de libertad indicados y luego se condensa para tener solo desplazamientos horizontales de piso y desplazamientos verticales en cada nudo. A esta matriz se la conoce como matriz de rigidez lateral-vertical \mathbf{K}_{L-V} (R. Aguiar *et al* 2008). Posteriormente se encuentra la matriz de rigidez de la superestructura $\mathbf{K}^{(s)}$ por ensamblaje directo (R. Aguiar, 2004). La matriz de masas $\mathbf{M}^{(s)}$ de la superestructura se halla evaluando la energía cinética de la estructura (R. Aguiar 2007). Para el modelo matemático que presenta el trabajo, la forma de la matriz diagonal $\mathbf{M}^{(s)}$ es la que se indica en la expresión 5.

$$\mathbf{M}^{(s)} = \begin{bmatrix} \mathbf{m}^{(st)} & \\ & \mathbf{m}^{(sp)} \end{bmatrix} \quad (5)$$

En la expresión anterior $\mathbf{m}^{(st)}$ es una matriz diagonal compuesta por la masa total del piso 1, la masa total del piso 2, la masa total del piso n ; $\mathbf{m}^{(sp)}$, es una matriz diagonal compuesta por cada una de las masas discretas de la superestructura, desde la primera masa concentrada \mathbf{m}_1 hasta la última masa considerada en el modelo. Una vez encontradas las matrices de masa $\mathbf{M}^{(s)}$ y de rigidez $\mathbf{K}^{(s)}$ se encuentra la matriz modal $\Phi^{(s)}$ de la superestructura y se determina la matriz de amortiguamiento $\mathbf{C}^{(s)}$ de la subestructura con la siguiente ecuación.

$$\mathbf{C}^{(b)} = \mathbf{M}^{(b)} \Phi \hat{\mathbf{C}}^{(b)} \Phi^T \mathbf{M}^{(b)} \quad (6)$$

Cada dispositivo de control posee tres rigideces según las direcciones X, Y, Z, debido a la presencia de los aisladores de resortes. También se cuenta con tres factores de amortiguamiento, dos en sentido horizontal y uno en sentido vertical, debido a la presencia de los amortiguadores. El modelo es el indicado en la Figura 2. La matrices de rigidez, $\mathbf{K}^{(b)}$ y de masa, $\mathbf{M}^{(b)}$ se determina de acuerdo a lo indicado por las ecuaciones (1) y (2). La matriz de amortiguamiento $\mathbf{C}^{(b)}$ se evalúa con la expresión 3 y la matriz diagonal $\hat{\mathbf{C}}^{(b)}$ (que define el amortiguamiento del amortiguador viscoso) se determina con la expresión 4. El sistema de ecuaciones diferenciales tanto para los dispositivos de aislamiento como para la superestructura se indican en las expresiones 7 y 8 (R. Aguiar et al 2008).

$$\mathbf{M}^{(b)} \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}^{(b)} \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}^{(b)} \mathbf{q} = - \mathbf{M}^{(b)} \mathbf{r}^{(b)} \ddot{\mathbf{u}}_g - \mathbf{r}^{(s)t} \mathbf{M}^{(s)} \ddot{\mathbf{u}} \quad (7)$$

$$\mathbf{M}^{(s)} \ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{C}^{(s)} \dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}^{(s)} \mathbf{u} = - \mathbf{M}^{(s)} \mathbf{r}^{(s)} \left[\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{r}^{(b)} \ddot{\mathbf{u}}_g \right] \quad (8)$$

En las expresiones precedentes $\dot{\mathbf{q}}$, $\ddot{\mathbf{q}}$, \mathbf{q} son los vectores de desplazamiento, velocidad y aceleración del sistema de aislamiento; $\mathbf{r}^{(b)}$ es un vector que relaciona los grados de libertad del sistema de aislamiento con la componente sísmica de movimiento del suelo; \mathbf{u} , $\dot{\mathbf{u}}$, $\ddot{\mathbf{u}}$ son los vectores de desplazamiento, velocidad y aceleración de los grados de libertad de la superestructura; $\mathbf{r}^{(s)}$ es similar a $\mathbf{r}^{(b)}$ pero en la superestructura. Tanto el vector $\mathbf{r}^{(b)}$ como $\mathbf{r}^{(s)}$ están compuestos únicamente por 0 y 1. El 1 se ubica en las coordenadas que están relacionadas con el movimiento del suelo. Finalmente $\ddot{\mathbf{u}}_g$ es la componente sísmica del movimiento del suelo. Si se está analizando para sismo horizontal será $\ddot{\mathbf{u}}_{gx}$, si es para sismo vertical será $\ddot{\mathbf{u}}_{gz}$.

Es importante destacar que los grados de libertad de la superestructura son desplazamientos relativos con respecto al movimiento del sistema de aislamiento. Por este motivo es que la matriz de masas es diagonal. Para los dispositivos de aislamiento, la solución del sistema de ecuaciones diferenciales considera que $\ddot{\mathbf{u}} = \mathbf{0}$. Es decir que aceleración proveniente de la superestructura no influye en el movimiento del sistema de aislamiento (J. Kulkarni et al, 2002). Para encontrar la respuesta en el tiempo del edificio aislado, con la citada hipótesis, se resuelve el sistema de ecuaciones diferenciales indicado en 9.

$$M^{(b)} \ddot{\mathbf{q}} + C^{(b)} \dot{\mathbf{q}} + K^{(b)} \mathbf{q} = -M^{(b)} \mathbf{r}^{(b)} \ddot{\mathbf{u}}_g \quad (9)$$

Para encontrar la respuesta de la superestructura se trabaja con la ecuación diferencial completa 7 y 8.

6. Resultados

6.1 Aceleraciones de ingreso a la superestructura

La respuesta medida en la superestructura, $\ddot{\mathbf{q}}$, es función del acelerograma definido por la excitación sísmica, $\ddot{\mathbf{u}}_g$. Las dos aceleraciones se muestran en las Figuras 10 para el terremoto de New Hall. En la parte superior de las figuras se representa la historia de aceleraciones horizontales, mientras que en la parte inferior se indica la historia de aceleraciones verticales.

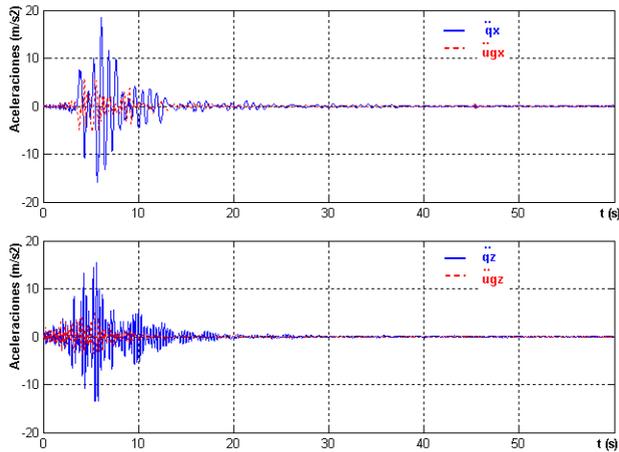


Figura 10 Aceleraciones de ingreso a superestructura. Registro de la estación New Hall. Fire Station (1994)

De la gráfica se deduce que, en general, hay una amplificación de las aceleraciones horizontales y verticales medidas inmediatamente por encima de los dispositivos de aislamiento. Los resultados para un número mayor de terremotos y una comparación de las aceleraciones del edificio aislado con relación al mismo, pero de base fija, pueden encontrarse en Tornello et al, 2007. La amplificación de las aceleraciones horizontales está asociada a un mayor amortiguamiento del sistema de aislamiento y depende de las características y contenidos de frecuencia de los acelerogramas que se utilicen para evaluar las respuestas en la superestructura (Tornello et al, 2008).

6.2 Respuestas en la superestructura

La historia de la respuesta en término de desplazamientos horizontales, en cada nivel del edificio, se indica en Figura 11, para el registro sísmico de New Hall. Los desplazamientos que muestran las gráficas son relativos con respecto al corrimiento de los dispositivos de control.

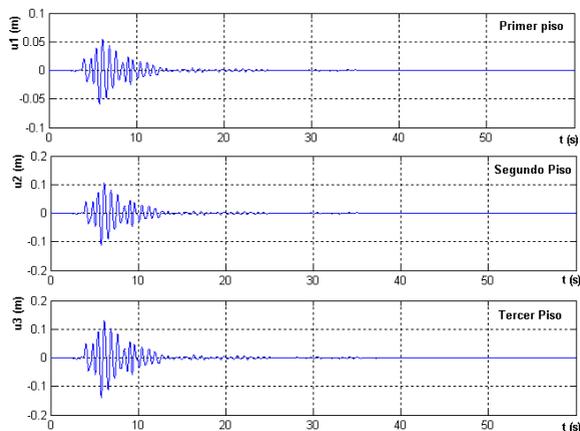


Figura 11 Desplazamientos horizontales en la superestructura. Registros sísmicos de New Hall. Fire Station (1994)

En la Figura 12 se muestran los desplazamientos verticales en cada nivel del edificio para el mismo registro de New Hall. Los resultados indican que los desplazamientos verticales de la superestructura son prácticamente despreciables comparados con los desplazamientos horizontales de la misma.

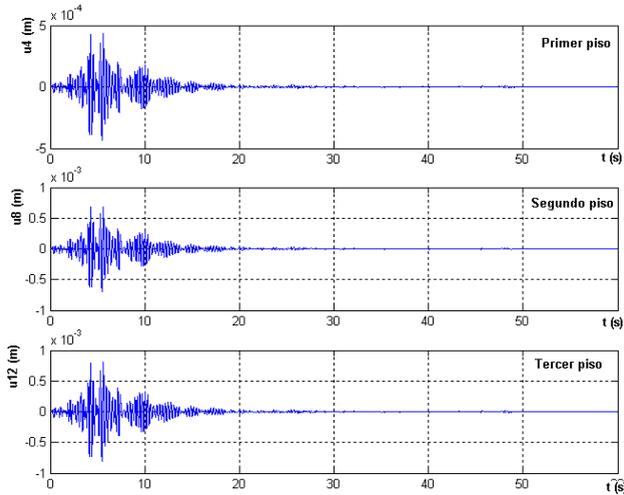


Figura 12 Desplazamientos verticales en la superestructura.

Registro sísmico de New Hall. Fire Station (1994).

En la Tabla 1 se resumen las respuestas en términos de desplazamientos horizontales (\mathbf{q}_h) y verticales (\mathbf{q}_v) en cada nivel del edificio para tres terremotos. El nivel indicado como (0) en la tabla, corresponde al nivel de los dispositivos de protección. La variación de los desplazamientos horizontales con la altura del edificio manifiesta, para todos los casos estudiados, el efecto pendular de la construcción frente al movimiento del terreno y pone en evidencia el mecanismo de disipación de energía del sistema de aislamiento. En cambio los desplazamientos verticales permanecen constantes con la altura del edificio.

Cuando se utilizan dispositivos de protección del tipo elastoméricos o friccionales, a diferencia de los representados por el presente modelo matemático, los desplazamientos se concentran a nivel de los aisladores

y permanecen constantes con la altura del edificio (Tornello M, 2012).

En la Figura 13 se grafican los desplazamientos horizontales de la superestructura y en la Figura 14 los desplazamientos verticales.

Tabla 1 Desplazamientos horizontales y verticales en cada nivel del edificio

Nivel	Terremoto de New Hall Estación Fire Station		Terremoto Northridge Estación Sylmar		Terremoto de Kobe Estación JMA	
	q_h (m)	q_v (m)	q_h (m)	q_v (m)	q_h (m)	q_v (m)
3	0.340	0.031	0.266	0.017	0.310	0.017
2	0.320	0.031	0.246	0.017	0.282	0.016
1	0.283	0.031	0.209	0.016	0.250	0.016
0	0.240	0.030	0.170	0.015	0.198	0.015

Nivel	Terremoto Cape Mend. Estación Cape Mend.		Terremoto Coalinga Estación Transmitter Hill		Terremoto de El Centro Estación Array N° 6	
	q_h (m)	q_v (m)	q_h (m)	q_v (m)	q_h (m)	q_v (m)
3	0.147	0.014	0.436	0.017	0.265	0.029
2	0.111	0.014	0.322	0.016	0.199	0.029
1	0.083	0.014	0.232	0.016	0.145	0.028
0	0.069	0.013	0.185	0.015	0.115	0.027

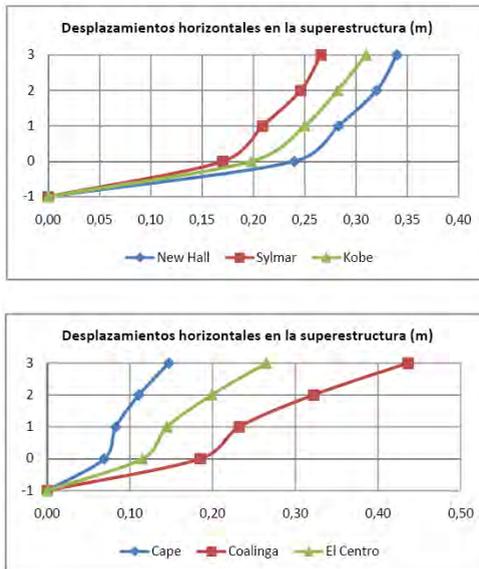


Figura 13 Desplazamientos horizontales en la superestructura

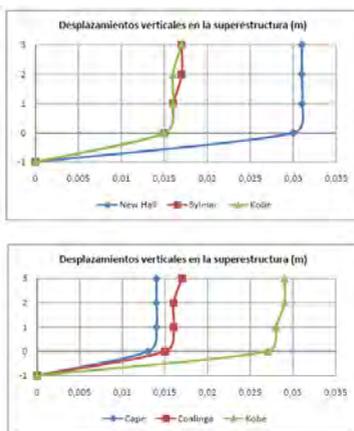


Figura 14 Desplazamientos verticales en la superestructura

En la Tabla.2 se resumen las respuestas en términos de aceleraciones horizontales (q_h) y verticales (q_v), inmediatamente por encima de los dispositivos de protección. El nivel indicado como (-1), en la tabla, corresponde a la aceleración del terreno.

Tabla 2 Aceleraciones horizontales y verticales por encima de los dispositivos de protección

Nivel	Terremoto Cape Mend. Estación Cape Mend.		Terremoto Coalinga Estación Transmitter Hill		Terremoto de El Centro Estación Array N° 6	
	\ddot{q}_h (m/s ²)	\ddot{q}_v (m/s ²)	\ddot{q}_h (m/s ²)	\ddot{q}_v (m/s ²)	\ddot{q}_h (m/s ²)	\ddot{q}_v (m/s ²)
1	6.28	6.60	10.50	5.20	8.35	19.70
-1	9.97	7.38	8.24	3.85	3.68	14.80

Nivel	Terremoto de New Hall Estación Fire Station		Terremoto Northridge Estación Sylmar		Terremoto de Kobe Estación JMA	
	\ddot{q}_h (m/s ²)	\ddot{q}_v (m/s ²)	\ddot{q}_h (m/s ²)	\ddot{q}_v (m/s ²)	\ddot{q}_h (m/s ²)	\ddot{q}_v (m/s ²)
1	15.88	13.48	11.79	4.54	13.11	6.06
-1	5.41	5.37	8.27	5.25	8.20	3.33

Los resultados de las respuestas en términos de aceleraciones indican que, en general, hay un incremento de los valores por encima de los dispositivos de aislamiento. Trabajos relacionados con la comparación de las respuestas con otros dispositivos (Tornello et al, 2007) demuestran que, por ejemplo, los aisladores elastoméricos filtran más eficientemente las aceleraciones horizontales y generalmente se observan reducciones de las aceleraciones entre los dos niveles que compara la Tabla 2. Las mayores aceleraciones se deben a un alto amortiguamiento del sistema de aislamiento (26% en sentido horizontal y 13% en sentido vertical con relación al amortiguamiento crítico), comparado con otros sistemas, valor necesario para controlar los elevados desplazamientos a nivel de dispositivos de aislamiento frente a terremotos de tipo impulsivos y de alto poder destructivo. Si bien otros sistemas, con menor amortiguamiento, filtran más eficientemente las aceleraciones horizontales, no queda resuelto el requerimiento de dimensiones de los dispositivos de aislamiento para controlar los elevados desplazamientos ocasionados por los terremotos con características de pulso.

Conclusiones

El modelo matemático desarrollado en el trabajo ha permitido predecir la respuesta de la estructura aislada, en términos de aceleraciones y desplazamientos, cuando el edificio está sujeto a la acción de terremotos destructivos en

Desde el punto de vista científico-tecnológico los modelos matemáticos permiten generar nuevos conocimientos y patrones, los cuales son relevantes para predecir el comportamiento de fenómenos físicos.

A nivel general, los aportes que los modelos matemáticos hacen a la comprensión de un problema implica el desarrollo de distintas fases tales como: simulación, estimación, descripción, análisis e interpretación aplicados a los resultados de fenómenos físicos situación que permite acercarse a la realidad.

Los resultados que se obtienen de un modelo matemático para predecir la respuesta no deben ser interpretados como únicos hasta que los mismos sean validados con resultados reales que provengan de otros procesos (mediciones del fenómeno físico en el campo real). La comparativa de resultados puede conducir a una revisión del modelo matemático con el fin de mejorar su performance de tal manera que los resultados representen lo más fielmente posible la realidad física.

Referencias

- AGUIAR R., (2004). *Análisis Matricial de Estructuras*. Centro de Investigaciones Científicas. Escuela Politécnica del Ejército, Tercera Edición, 550 p., Quito, Ecuador.
- AGUIAR R., (2007). *Dinámica de estructuras con MATLAB*. Centro de Investigaciones Científicas. Escuela Politécnica del Ejército, 292 p., Quito, Ecuador.
- AGUIAR R., Almazán J. L., Dechent P. y Suárez V (2008). *Aisladores de base Elastoméricos y FPS*. Centro de Investigaciones Científicas. Escuela Politécnica del Ejército, 292 p., Quito, Ecuador.
- DÍAZ, J. L; Casanueva, M.; Pérez, R.; López, A.; Labastida, J. (2005). *El Modelo en la Ciencia y la Cultura*. México: Siglo XXI Editores.
- DÍAZ, V. (2009). *Metodología de la Investigación Científica y la Bioestadística*. Chile: Ril Editores.
- FOUREZ, G. (2006). *La construcción del Conocimiento Científico*. España: Nancea, S. A. de Ediciones.
- FUENTES GONZÁLEZ H, Silvia Cruz Baranda, Álvarez Valiente I,

- (1998). *La Didáctica de la Educación Superior desde un Enfoque Holístico? Configuracional. Modelo Holístico Configuracional de la Didáctica*. Capítulo II. Santiago de Cuba.
- KULKARNI J.; JANGRID R., (2002). *Rigid body response of base-isolated structures*. Journal of Structural Control (9), 171-188.
- MARTÍNEZ M. (1997). *El método hermenéutico-dialéctico. Comportamiento humano*. Capítulo 7. Editorial Trillas.
- TORNELLO M. y SARRAZIN A. M. (2007). *Dynamic response of a building with base isolation for near-fault motions*. 9th Canadian Conference on Earthquake Engineering. Paper N° 1057. Ottawa. CAEE, ACEP.
- TORNELLO M. (2012). *Protección de estructuras con aislamiento sísmico de base*. Schaltungsdienst Lange. Editorial Académica Española. Pp. 285. ISBN: 978-3-8484-5168-5.