

El lenguaje de la Matemática: modelos para la enseñanza

Clarisa Noemí Berman¹ & Ana María Narvaez²

Resumen

El propósito de este trabajo es mostrar la importancia del uso de modelos para lograr la resignificación de contenidos; en particular, la noción de función en la cátedra de Análisis Matemático de una variable real en las carreras de ingeniería de la Facultad Regional Mendoza de la Universidad Tecnológica Nacional. Se tiene en cuenta la evolución histórica - epistemológica de la noción de función para identificar las variables que influyeron en el desarrollo de dicho concepto, y analizar las concepciones que manifiestan los alumnos en sus producciones. A partir de un análisis realizado, se pone en práctica una situación didáctica, que permite observar la brecha o distancia entre lo que se ha enseñado y lo que realmente ha aprendido el alumno. El método utilizado se adapta a la investigación - acción, propia de las situaciones de enseñanza y aprendizaje. Se trabaja con situaciones de la realidad, actuando sobre ellas, analizando sus limitaciones e interactuando con el concepto disciplinar a tratar. En esta etapa se ha podido corroborar la riqueza del uso de modelos como herramienta didáctica en la Matemática universitaria, ya que favorece la construcción del pensamiento matemático, afianzando su lenguaje y logrando que el estudiante, futuro ingeniero, se acerque a la correcta formulación de situaciones; en consecuencia, el alumno adquiere un significativo conocimiento que redundará en la calidad de su aprendizaje.

Palabras claves: modelización, modelación, didáctica de la matemática.

¹ Grupo IEMI, F. R. Mendoza, UTN

² Grupo IEMI, F. R. Mendoza, UTN; Facultad de Ingeniería, UNCuyo

Introducción

Como es bien conocido, existen tres elementos importantes en todo conocimiento, que a su vez están presente en la epistemología científica; son: el sujeto, el objeto de estudio y la temporalidad.

Como dice Chevallard (1991) en el aprendizaje, en particular el matemático, es necesario tener en cuenta el contexto social del sujeto, es decir, la institución, las autoridades, los programas de estudio y las carreras, entre otros. Pretender trabajar con una metodología desde el constructivismo puro por ejemplo, sería una pretensión idealista, ya que la carga horaria de la disciplina no lo permite y, además, el alumno que ingresa a nuestra universidad no está habituado a trabajar bajo las condiciones de esa metodología. El saber científico se transforma en saber a enseñar y en esta transposición didáctica, el docente es el nexo entre el alumno y el objeto de estudio. El profesor no sólo debe tener conocimiento del objeto a enseñar sino también debe partir de una hipótesis de aprendizaje, por lo tanto, debería plantearse preguntas como por ejemplo: ¿qué implicancia tiene mi forma de enseñar?, ¿qué obstáculos epistemológicos y didácticos debo tener en cuenta para que el estudiante alcance un conocimiento matemático adecuado? y en esta búsqueda para dar respuesta a los interrogantes, surge la necesidad de ver la realidad del aula.

De lo mencionado anteriormente, se desprende que la metodología debe ser apropiada respecto del objeto de estudio, la intencionalidad de su aprendizaje y del sujeto que aprende.

El uso de modelos matemáticos como estrategia de motivación en el estudio de nuevos contenidos o para iniciar al estudiante en la resolución de problemas favorece el proceso de enseñanza. De esta manera se puede lograr que el abordaje de los contenidos sea impartido en forma no aislada ni descontextualizada, favoreciendo el análisis reflexivo.

En este trabajo, el modelo es entendido como una herramienta valiosa para ayudar en la construcción del conocimiento.

Antecedentes

La construcción de modelos matemáticos sencillos en primer año de las carreras de ingenierías se relaciona con el objeto función de una variable real, contenido de Análisis Matemático I. Por lo tanto, su estudio es una variable relevante en este trabajo que se encuadra en la Didáctica

de la Matemática universitaria, considerada como una disciplina experimental

Teniendo en cuenta las preguntas ¿cuáles son los recursos más eficientes que permiten una mejor comprensión de un concepto matemático?; ¿es lo mismo comprender un concepto que usarlo?, se han buscado respuestas considerando las investigaciones de Brousseau (1983), Duval (1991), Rico (1997), Ruiz Higuera (1998) y Dubinsky (1991), entre otras.

Rico (1997, p.111) expresa que “El modelo ofrece al usuario, generalmente resolutor [sic] de un problema, un esquema que sustituye al concepto original y que por sus cualidades, está mejor adaptado al pensamiento humano que el original; esto facilita al resolutor su [sic] tarea”.

Para Villa (2007, p. 67), se llama simplemente modelo matemático, a un conjunto de símbolos y relaciones matemáticas que intentan explicar, predecir y solucionar algunos aspectos de un fenómeno o situación.

Según García et al. (2013), Villa establece una distinción entre modelización matemática y modelación matemática. Modelización es una actividad científica, en la que se involucra la construcción de un modelo matemático con el propósito de generar conocimiento.

La modelación es la construcción de significados de los objetos matemáticos. En este trabajo se utilizarán ambas.

Objetivos e Hipótesis

El objetivo del presente trabajo es construir aprendizajes de los contenidos de Análisis Matemático de una variable real mediante la utilización de modelos, dada su funcionalidad como recurso didáctico.

Son objetivos específicos, el desarrollo de competencias en el tratamiento del concepto de función mediante la modelización y la modelación.

Suponemos que los estudiantes que ingresan a nuestra universidad están habituados a:

- Trabajar con funciones como un objeto en sí mismo, sin otorgarle significación a los conceptos de dominio, imagen, ceros, crecimiento y acotación, entre otros.

- Una enseñanza en la que se favorece la conexión entre la fórmula y la representación gráfica; motivo por el cual la representación se convierte en un fin.
- Una enseñanza de conceptos aislados, es decir sin conexiones lógicas, lo que dificulta el aprendizaje.

Respecto de sus conocimientos, los estudiantes:

- Evidencian un buen manejo de los mismos cuando éstos son requeridos en ejercicios rutinarios, no en situaciones nuevas; lo que dificulta el trabajo de modelización.
- Muestran interés en la tarea que se les propone, sin embargo, se visualiza un bloqueo cuando frente a situaciones nuevas requieren para su solución de contenidos que han sido tratados en el nivel medio y en el curso preuniversitario.
- Poseen las herramientas necesarias para resolver situaciones nuevas pero no son conscientes de las mismas para utilizarlas en el planteo y solución.
- Presentan dificultades en la resolución de problemas sencillos que involucran geometría y cálculo.
- No participan activamente en su aprendizaje.

Análisis histórico epistemológico del concepto de función

En la evolución del concepto función a lo largo de la historia han aparecido obstáculos epistemológicos que influyeron en su desarrollo dando lugar a distintas concepciones del concepto.

Haciendo un breve recorrido histórico y epistemológico del concepto, pueden explicarse los motivos de ciertas dificultades que presentan los estudiantes en el proceso de modelación, encontrando una tendencia en la relación causa- efecto.

En la época de los babilónicos se utilizaban tablas de valores similares a las que actualmente usan los estudiantes para funciones, sin embargo no se puede asegurar que los babilónicos llegaron a una expresión formal de los resultados, existía una “intuición funcional”.

El hecho de que no se haya conservado ninguna formulación general de estas tablas no significa necesariamente que no existiera en el pensamiento antiguo prehelénico conciencia de la generalidad de dichas reglas o principios... (Boyer, 1986, p. 66).

Teniendo en cuenta que sus tabulaciones representaban relaciones principalmente astronómicas, imposibles de medir, las tablas podrían tomarse como una herramienta para conjeturar un modelo que mostraría regularidades empíricas. En la actualidad se observa que un alto porcentaje de estudiantes de primer año de las carreras de ingenierías presentan dificultades cuando deben realizar la conversión de una representación a otra. Identificar un mismo objeto matemático en distintos sistemas de representación semiótica aparece como un obstáculo en el aprendizaje. Es conocido el hecho que trabajar sólo con tabla de valores no asegura una interpretación acabada del concepto de función.

Los griegos aceptaban ideas como movimiento y variable, tenían una idea intuitiva de función, sin embargo, no se permitían asociarla con la matemática en la que números y magnitudes no se relacionaban. La matemática se consideraba estática y, por ende, externa a la física, se limitaba a expresar ecuaciones con incógnitas y no relaciones entre variables. De lo anterior se deduce que la asociación de un número con determinada magnitud, tan natural en la actualidad, no lo era en esa época.

Los pitagóricos sortearon de forma insuficiente el obstáculo citado anteriormente, pues relacionaban mediante razones numéricas, magnitudes semejantes. No aceptaban relacionar magnitudes diferentes, por ejemplo, perímetro con área o área con volumen. Adicionalmente, tenían las limitaciones derivadas del manejo del conjunto de números enteros (discreto), con magnitudes continuas usadas en física.

La misma dificultad registrada anteriormente, se observa en los estudiantes cuando deben expresar, por ejemplo, el área de un rectángulo en función de su perímetro o deben obtener una variable en función de otra a partir de magnitudes no semejantes.

En la Edad Media, se aceptaba todo lo que pudiese explicarse racionalmente, en especial los fenómenos dinámicos y no los estáticos.

Mientras Platón sostenía que las causas podían expresarse matemáticamente, Aristóteles no relacionaba la matemática (considerada como ciencia de carácter abstracto) con la física.

Oresme (1320 - 1382) introdujo de manera primitiva, lo que hoy constituye un registro gráfico de funciones, observándose aún la presencia del pensamiento griego, donde número y magnitud no se relacionaban. Sus representaciones eran cualitativas; representaba por medio de una figura la dependencia cualitativa de una determinada cualidad en relación con otra de la cual dependía.

En los siglos XV y XVI se produce un perfeccionamiento en el simbolismo algebraico, observándose una diferenciación entre los conceptos de variable e incógnita y, un avance importante en el concepto de función.

La identificación de cambios en fenómenos físicos, astronómicos y geométricos se asociaron a la cuantificación de variables.

Según Sierpinska (1989), el desarrollo de la notación simbólica y de la resolución de ecuaciones fue tan significativo que, por medio de él, se fue superando el obstáculo epistemológico de la diferenciación entre número y magnitud, aunque agregó el problema de pensar que sólo eran funciones aquellas que podían expresarse mediante fórmulas o ecuaciones.

A finales del siglo XIX y primeras décadas del siglo XX, la teoría de conjuntos se incorpora a la matemática, y el concepto de función es considerado como un conjunto de pares ordenados que deben cumplir las condiciones de existencia y unicidad.

Como se observa, la noción de función fue evolucionando a través del tiempo según distintas concepciones y, por ende, fue presentando distintos obstáculos cognitivos, siendo la tabla numérica de simple entrada, el elemento inicial relacionado con el concepto; posteriormente aparecen las representaciones gráficas y por último la expresión analítica.

En la actualidad, el concepto de función es una concepción integrada y refinada de la evolución del pensamiento humano. Ruiz Higuera (1998, p.112) dice que de acuerdo con los filósofos Gosseteste y Bacón las matemáticas son el principal instrumento para estudiar los fenómenos naturales. Por lo que el proceso de modelización permite reproducir en forma simplificada fenómenos complejos de la física, astronomía, ingenierías, entre otros, externos de la matemática pura.

En nuestros cursos de primer año el concepto de función se define mediante las condiciones de existencia y unicidad.

Marco Teórico

Las investigaciones utilizadas como antecedentes del presente trabajo, explican cómo se construyen los conceptos matemáticos teniendo como marco teórico la Teoría APOE (Acción, Proceso, Objeto, Esquema). Ed Dubinsky (1991) creador de la misma, parte de la hipótesis que los individuos no aprenden directamente los conceptos matemáticos, si tienen las estructuras apropiadas, aprender es fácil, si no las tienen, es casi imposible. Por lo mencionado, esta Teoría es la indicada para favorecer la construcción y conexión de los conceptos de estudio mediante modelización y modelación.

Metodología

Los procesos involucrados en la modelización, las competencias que se desean lograr en los estudiantes, el análisis comparativo de la evolución histórica del concepto de función con el quehacer del estudiante y las características principales de los mismos, son los ejes tenidos en cuenta para el diseño de la metodología.

Como es bien conocido, la movilidad y el tratamiento en los distintos registros de representación semiótica, favorecen la utilización del concepto como herramienta en la elaboración de un modelo matemático y, es allí donde el objeto de estudio adquiere sentido.

¿No son acaso las ciencias las que proveen de problemas a la matemática y por ende quienes la enriquecen?

Debido a las características de los estudiantes se comienza con modelos sencillos, en lo posible, se parte de datos obtenidos empíricamente y se trabaja, principalmente con funciones lineales, cuadráticas, de Heaviside y también las definidas por partes.

En otras palabras, la metodología se fundamenta en el hecho no de enseñar para aplicar sino aplicar para enseñar. Por lo que en función del concepto a construir, se selecciona una situación didáctica particular en la que el modelo es una herramienta para su tratamiento. Dicha metodología requiere de una participación activa del estudiante y del docente, quien tiene como tarea fundamental gestionar el aprendizaje en el alumno mediante la vinculación de contenidos con situaciones que despierten su interés.

Para favorecer el aprendizaje se tiene en cuenta que no es sólo importante mostrar donde está el error, sino que además se debe trabajar sobre él, permitiendo de esta manera ayudar a los alumnos a realizar las reestructuraciones mentales necesarias para aprender.

Rico (1992a, p. 9 -10) manifiesta que “Al cometer un error, el alumno expresa el carácter incompleto de su conocimiento”.

Para contestar el interrogante ¿es suficiente tener determinados conocimientos matemáticos para resolver situaciones nuevas?, se inicia la actividad didáctica con dos situaciones que requieren del mismo concepto para su resolución: la función cuadrática. En primera instancia la situación es un ejercicio rutinario y en segunda instancia, es una situación contextualizada que requiere de la construcción de un modelo.

Experiencia áulica

El trabajo que se viene realizando hace tres años en cuatro cursos de primer año de distintas ingenierías de la Facultad Regional Mendoza, consiste en que los estudiantes resuelvan las siguientes situaciones, entre otras actividades.

Actividad 1

Realizar un análisis de la función $f(x) = 7x - x^2$ indicando dominio, imagen, ceros, cotas, intervalos de crecimiento y positividad, máximos y mínimos. Graficar aproximadamente la función indicando coordenadas del vértice.

Se ha notado que la mayoría de los estudiantes no presentan dificultades en esta actividad trabajando en el conjunto de números reales.

Posteriormente, se solicita que resuelvan como tarea extraclase el siguiente problema.

Actividad 2

Se desea delimitar una zona de seguridad rectangular para lo que se dispone de 14 metros de cinta. ¿Qué modelo matemático representa adecuadamente el área en función de un lado de la zona?

Utilice el modelo encontrado para calcular el área máxima en función del lado.

En el control de esta actividad, se ha observado que sólo un alumno la resolvió satisfactoriamente.

Las explicaciones orales más relevantes de los estudiantes, fueron:

- utilicé tablas de valores colocando valores enteros,
- resolví la ecuación cuadrática,
- no sabía por dónde empezar,
- no intenté resolverlo y
- si dispongo de 14 metros, no puedo tener distinta superficie.

En la institucionalización, al esquematizar la situación, se corrobora geométricamente la posibilidad de que exista perímetro constante y área variable. Luego se analiza el enunciado para diseñar el modelo matemático, se obtiene la misma expresión cuadrática de la actividad 1, que permite solucionar este problema. Se solicita a los estudiantes que vuelvan al ejercicio inicial lo que les permite reconocer la equivalencia entre la expresión algebraica de la función obtenida y la trabajada exitosamente en la actividad 1.

Con el objetivo de mostrar que una función no es una fórmula, se pide que determinen el dominio del modelo y se analiza que las funciones no son las mismas dadas las restricciones del contexto donde se está trabajando.

Si bien se trabaja con el gráfico de la actividad 1, se realiza un análisis cualitativo de dicha curva en la actividad 2, indicando la ubicación de las variables en el sistema cartesiano, lo que permite encontrar la respuesta sobre la cuantificación del área máxima.

Discusión

Se observa que los pasos utilizados en el tratamiento del problema se corresponden, justamente, con los procesos involucrados en la modelación: pensar, razonar, asociar, calcular, relacionar, analizar, articular y formalizar.

Esta experiencia áulica permite un aprestamiento en el uso de la modelación como herramienta.

Se observó que la resolución correcta de la actividad 1 no permitió la concreción de la actividad 2. Por lo tanto, se reafirma el propósito de dar las dos situaciones para que el estudiante reflexione sobre la no funcionalidad de lo estudiado, si dichos conceptos no están disponibles cuando se los requiere.

Como ya se ha corroborado en otras investigaciones didácticas, se observa que no alcanza el conocimiento del concepto función para resolver situaciones nuevas que contengan dicho concepto.

Conclusiones

Las hipótesis planteadas han sido corroboradas, pues se puede concluir que los estudiantes al abordar la actividad 2 habían alcanzado el concepto función a nivel acción según la teoría APOE. Si bien el concepto había sido desarrollado en el nivel secundario y en el curso preuniversitario, la metodología empleada había sido la llamada “tradicional”, en el sentido de Alvarenga. Entiéndase por enseñanza tradicional a un sistema que no se fundamenta en una investigación científica en educación matemática y que en general, no ha logrado avances en el aprendizaje de los conceptos matemáticos. (Alvarenga, 2003, p. 2).

Se deduce que la evolución histórica y epistemológica del concepto función está íntimamente relacionada con las dificultades que se presentan en el tratamiento del tema.

Es importante abordar los contenidos partiendo de la modelización para que el estudiante logre la modelación de los temas involucrados.

Se reafirma la relevancia del tratamiento didáctico de la función cuadrática en las etapas de escolaridad anteriores a la universitaria.

Para achicar la brecha en la conversión de registros es importante reconocer que el objeto matemático es distinto de su representación (un mismo objeto puede expresarse en distintos registros), como indica Duval (1991).

El uso de modelos favorece el desarrollo de competencias tales como: interés, voluntad, habilidad, disposición, uso correcto del lenguaje y formalización.

Se destaca la necesidad de contextualizar los problemas mediante la utilización de modelos funcionales acordes a las características de los estudiantes (por ejemplo, conocimientos previos y perfil de la carrera). La riqueza de estos modelos en la currícula de las ingenierías permite un amplio y variado diseño de situaciones didácticas.

Reflexiones Finales

Se espera preparar material didáctico que permita dar tratamiento a los contenidos de la asignatura, con actividades que incluyan modelos específicos de las distintas carreras de Ingeniería de la FRM, UTN para estudiantes de primer año.

Bibliografía

- BARBOSA ALVARENGA, K. (2003) La enseñanza de inecuaciones desde el punto de vista de la teoría APOE. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* 6(3), 199- 219.
- BOYER, C. (1986). *Historia de las Matemáticas*. Alianza Universidad. Madrid. Edición original.
- BROUSSEAU, G. (1983). Les obstacles épistémologiques et les problèmes en Mathématiques. *Recherches en didactique des Mathématiques*.
- CHEVALLARD, Y. (1991) *La transposition didactique. Du savoir savant au savoir enseigné*. Grenoble: La pensée Sauvage.
- DUBINSKY, E. (1991). The Constructive Aspects of Reflective Abstraction in Advanced Mathematics, en L. P. Steffe (ed.), *Epistemological Foundation of Mathematical Experience*. Nueva York: Springer-Verlag.
- DUVAL, R. (1991). *Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales*. Universidad del Valle. Instituto de Educación y Pedagogía, Grupo de Educación Matemática. Meter Lang S.A. Editions scientifiques européennes.

- GARCÍA QUIROGA B., Coronado A., Montealegre Quintana L., Giraldo Ospina A., Tovar Piza B., Morales Parra S., Cortés Joven D. (2013). *Competencias matemáticas y actividad matemática de aprendizaje*. Blog del núcleo de investigación en educación matemática. Universidad de la Amazonia Florencia. Colombia. Fecha de consulta 28/03/14. Disponible en: <http://niemupelmaracay.blogspot.com/>
- RICO, L. (coord.), Castro Encarnación, Castro Enrique, Coriat E. Marín A., Puig L., Sierra M., Socas M. (1997). *La educación matemática en la enseñanza secundaria*. Cuadernos de formación de profesorado. Red Federal de Formación Docente. Ministerio de Cultura y Educación de la Nación
- RICO, L. (1992a.) *Investigación sobre errores de aprendizaje en Educación Matemática*. Departamento de Didáctica de la matemática. Universidad de Granada.
- RUIZ HIGUERAS, L. (1998). *La noción de función: Análisis epistemológico y didáctico*. Universidad de Jaén, Servicio de Publicaciones.
- SIERPINSKA, A. (1989). *On 15-17 years old students' conceptions of functions, iteration of functions and attractive points*. Warsaw, Poland: Institute of Mathematics, Polish Academy of Sciences, preprint, 454.
- VILLA, J. A. (2007) *La modelación como proceso en el aula de matemáticas*. Un nuevo marco de referencia y un ejemplo. *Tecnológicas*, p. 63-85, 2012. Fecha de consulta 29/03/14. Disponible en: <http://funes.uniandes.edu.co/959/>