

El lenguaje relacionado con el aprendizaje del concepto de base de un espacio vectorial utilizando textos. Una mirada desde la teoría APOE

Susana Andía¹ & Liliana Repetto²

Resumen

Para los docentes de un primer curso de Álgebra Lineal, siempre es preocupante llegar al instante del programa donde se aborda el concepto de Espacio Vectorial. Sabemos que nos enfrentamos a un gran problema para el aprendizaje de los estudiantes: ellos, en general, no alcanzan a comprender qué es un Espacio Vectorial. Si bien algunos estudiantes pueden determinar si un conjunto de vectores tiene esta estructura, la mayoría realiza un trabajo meramente mecánico, sin lograr una abstracción reflexiva sobre lo que están efectuando.

Teniendo como marco teórico la Teoría APOE (Acción, Proceso, Objeto, Esquema) y a partir de la Descomposición Genética propuesta en su Tesis de Maestría por Darly Ku, se analiza el lenguaje de **algunos de los textos propuestos para la enseñanza** del Álgebra Lineal en el nivel superior. El objeto es evaluar si permiten que el estudiante realice las construcciones mentales necesarias para aprender el concepto de Base de un Espacio Vectorial. Es fundamental la observación de la manera en que aparecen los conceptos previos involucrados con la noción de Base, la ejemplificación utilizada, determinando si hay coherencia entre los contenidos y las actividades propuestas para el estudiante.

Palabras claves: lenguaje, Teoría APOE, Descomposición Genética, enseñanza, aprendizaje formal, empírico.

¹ Licenciada en Matemática; Prof Adjunta de Álgebra y Geometría Analítica de Facultad Regional Mendoza, UTN. susana_andia@yahoo.com.ar

² Magister en Didáctica de las Ciencias; Prof Adjunta de Álgebra y Geometría Analítica de Facultad Regional Mendoza, UTN. lilirepetto@hotmail.com

El lenguaje requerido en el área de la Matemática, especialmente en el Álgebra Lineal, es muy complicado para el entendimiento de los estudiantes, cualquiera sea su formación anterior. Es por esto, que es muy importante, como se abordan los conceptos que involucra el Álgebra en los textos recomendados para los estudiantes, requiriendo una investigación exhaustiva de la presentación que cada autor realiza.

Fundamentado por los trabajos de diferentes investigadores, se propone en este trabajo realizar un análisis del lenguaje de algunos textos de Álgebra Lineal sugeridos y utilizados en el nivel superior para el dictado de un primer de introducción de Álgebra Lineal. Si bien la existencia en el mercado literario es muy abundante, sólo se consideran algunos de los textos, quizás, los más utilizados por las cátedras que imparten la asignatura.

La finalidad es determinar si, a través de los textos, los estudiantes pueden realizar las construcciones mentales necesarias para lograr el aprendizaje del concepto de Base de un Espacio Vectorial. Se trata de corroborar, fundamentalmente, si en esta bibliografía se puede implementar la Descomposición Genética propuesta en la tesis de Darly A. Ku (2007). En esta tesis, se investiga cuáles pueden ser las construcciones mentales que un estudiante debe realizar para aprehender este concepto, bajo la teoría APOE (Acción, Proceso, Objeto, Esquema) (Asiala, et al., 1996).

Para realizar el análisis de estos textos, se continúa aplicando como marco de sustento teórico a la Teoría APOE, ya que se considera que permite describir e interpretar las construcciones mentales que los estudiantes presentan para aprehender el concepto de Base, a partir de otras nociones que se relacionan.

Cabe destacar que, si bien se han realizado varias investigaciones sobre cómo se enseña y cómo aprehende el estudiante los conceptos de la Matemática, no son muchos las investigaciones realizadas en el campo del Álgebra Lineal. La mayoría de las realizadas, se encuentran dirigidas a los problemas de aprendizaje en los conceptos de *Espacio Vectorial*, *Transformaciones Lineales* y *Sistemas de Ecuaciones Lineales*; sin embargo, son pocas las referidas al concepto de Base de un Espacio Vectorial (Ku, 2007).

En el artículo publicado: “La Théorie APOS et l’enseignement de l’algèbre linéaire” por Trigueros y Okaç (2005), los autores afirman que los estudiantes presentan problemas de aprendizaje en los conceptos abstractos del Álgebra Lineal.

Para los docentes de un primer curso de Álgebra Lineal, siempre es preocupante llegar al instante del programa donde se aborda este concepto. Sabemos que nos enfrentamos a un gran problema para el aprendizaje de los estudiantes: ellos, en general, no alcanzan a comprender el lenguaje abstracto mediante el cual se define un Espacio Vectorial. Si bien algunos estudiantes pueden determinar si un conjunto de vectores tiene esta estructura, la mayoría realiza un trabajo meramente mecánico, sin lograr una reflexión sobre lo que están efectuando.

En su tesis, Ku menciona a algunas de las investigaciones relacionadas al concepto de Base de los Espacios Vectoriales y de las nociones involucradas, como Conjunto Generador, conjunto generado, Espacio Generado, Independencia y Dependencia Lineal. Particularmente, comenta sobre las siguientes investigaciones: la tesis doctoral de Chargoy (2006) que se refiere a las dificultades asociadas al concepto de Base de un espacio vectorial; el trabajo de investigación de Da Silva y Lins (2002) que se refiere a los significados del concepto de Base y el artículo escrito por Nardi (1997) que se centra en los conceptos de conjunto generador y espacios generados (Ku, Cap I, pág 6, 2007).

En este artículo, Nardi (1997) presenta un estudio donde analiza cómo se abordan los conceptos de espacio generado y de conjunto generador en Álgebra Lineal. Este trabajo se basa en una entrevista a 6 estudiantes de la Universidad de Oxford. En la entrevista se les proporcionó a los estudiantes la siguiente cadena de términos: Generar, ser generado por, conjunto generador, espacio generado, con el fin de que muestren las nociones que tienen acerca de estos conceptos. De acuerdo a las entrevistas, Nardi expresa que algunas de las dificultades observadas fueron: 1) que los estudiantes, al recurrir a un soporte visual en \mathbb{R}^2 para responder a las preguntas, mostraban una débil interpretación de los conceptos mencionados en el contexto geométrico; 2) que para los entrevistados, el conjunto generador representa una Base de un Espacio Vectorial, 3) los estudiantes confunden los términos de espacio generado y conjunto generador, no hacen distinción del significado de uno y del otro. Nardi, en cada caso, hace consideraciones didácticas con la finalidad de buscar una solución a las dificultades observadas.

¿Cómo aparecen en textos de nivel superior para Álgebra Lineal las nociones involucradas con el concepto de Base de un Espacio Vectorial?

¿Permiten que el estudiante realice los mecanismos de construcción mental de estas nociones?

Con el objetivo de buscar respuestas a estos interrogantes, se analiza algunos textos que se sugiere en la bibliografía del programa de un primer curso de Álgebra Lineal.

- Poole, David, Álgebra Lineal. Una Introducción Moderna, Internacional Thomson Editores, 2004, Mx, (Traducción del libro Linear Algebra. Modern Introduction, Brooks/Cole-Thomson Learning, 2003).
- Grossman, Stanley, Álgebra Lineal, Ed. M^c Graw Hill, 1996, (Traducción de la 5^a edición del libro Elementary Linear Algebra. With Applications, Saunders Collage Publishing, 1995).
- Perry, William L, Algebra Lineal con Aplicaciones, Ed. M^c Graw Hill, 1990, Mx. (Traducción de la 1^a edición del libro Elementary Linear Algebra, 1989).

Es por esto que es muy importante cómo se presentan los contenidos en los textos: si tienen en cuenta lo geométrico, si las gráficas son realmente ilustrativas y contribuyen a la construcción de los conceptos, si se utiliza los cambios de registro para facilitar la comprensión del tema, etc.

Esto es importante en el desarrollo del aprendizaje ya que, como se reportó anteriormente, hay que lograr que los estudiantes tengan conocimientos significativos de los conceptos, es decir que haya una conexión entre lo que se enseña en el aula con lo que se enseña en los libros, para no causar confusión en el estudiante. (Ku, Cap I, pág 10, 2007).

¿Qué significa APOE?

Acción

Una acción es una (o un conjunto de) manipulación física o mental sobre objetos. Es la transformación de un objeto, que en un individuo es percibida como externa (Trigueros y Okaç 2005). Una persona se encuentra en una concepción acción cuando responde sólo a estímulos externos, es decir, que se le da una indicación y la realiza, se puede decir que un estudiante se encuentra en concepción acción cuando imita a su profesor en el cálculo o resolución, no se plantea ni se pregunta qué está haciendo o por qué, sólo repite en forma mecánica.

Proceso

Se puede describir como una serie de acciones que se repiten sobre un concepto con la particularidad de que el individuo controla conscientemente las acciones sobre él, pudiendo describir paso a paso las acciones que realiza, puede revertirlas, puede coordinar y componer una transformación con otras transformaciones para obtener una nueva. Cuando una acción se repite y el individuo reflexiona sobre ella, puede ser interiorizada en un proceso. El proceso es una transformación basada en una construcción interna, ya no dirigida por estímulos que el individuo percibe como externos. Cuando un individuo puede controlar una acción en forma consciente, entonces la acción es interiorizada y *la acción se transforma en proceso*.

Objeto

Cuando una persona reflexiona acerca de las operaciones aplicadas en un proceso particular, llega a tomar conciencia del mismo como una totalidad y puede efectuar y construir acciones o transformaciones sobre él, entonces se dice que ese proceso ha sido encapsulado en un objeto. Un objeto se construye cuando un proceso se ha encapsulado. Este objeto puede ser desencapsulado cuando se ejecutan acciones o procesos sobre él, es decir, que se revierte el proceso, para utilizar sus propiedades y usarlo.

Esquema

Un esquema es conjunto coherente de acciones, procesos y objetos. Un esquema puede ser una colección de acciones, procesos, objetos y aun, otros esquemas. Los objetos pueden ser transformados por nuevas acciones, lo cual lleva a nuevos procesos, objetos y esquemas. Un esquema es una construcción cognitiva que nos permite enfrentar una situación problemática, resolviéndola haciendo uso de definiciones, propiedades, objetos coherentes a la situación. A la vez, hay situaciones donde un esquema puede ser tratado como un objeto.

La investigación bajo el marco de APOE, facilita el hecho de conocer cómo el estudiante construye el concepto, permitiendo la confección de diseños utilizados para mejorar la enseñanza de la Matemática en nuestros estudiantes con el objeto que la aprendan desde adentro. Ed Dubinsky propone una estrategia pedagógica para el aprendizaje de los conceptos de Álgebra Lineal apoyada en la Teoría y menciona que se debe diseñar

un libro de Álgebra Lineal que proponga las actividades que debe realizar un estudiante para adquirir cierto conocimiento (Dubinsky, 1997).

Descomposición Genética del concepto de Base de un Espacio Vectorial, según Ku

La Descomposición Genética es un análisis de los conceptos matemáticos en el que se tiene en cuenta las construcciones del conocimiento que se necesita para su aprendizaje y estas construcciones se logran a través de las concepciones acción-proceso-objeto-esquema de las que se ha hablado.

El investigador elabora una serie de actividades (instrucciones) y observa a los estudiantes entrevistados tomando nota y/o grabando las respuestas que proporcionan los entrevistados. Se continúa con una nueva etapa: el análisis de datos, que permite la llegar a la tercera etapa, que es la modificación y mejoramiento, si es necesario de la Descomposición Genética.

La Descomposición Genética se refina a través de la investigación, que se repite hasta que se considere que permite enseñar de manera efectiva y que se pueda utilizar para explicar cuáles son las construcciones cognitivas necesarias para aprender el concepto.

Se debe señalar que, a partir de la Descomposición Genética, y recorriendo el texto, se lleva el mismo orden en la aparición de los conceptos, se definen completamente los conocimientos previos, pero se considera que no se encadenan coherentemente con la ejercitación que se propone para el estudiante.

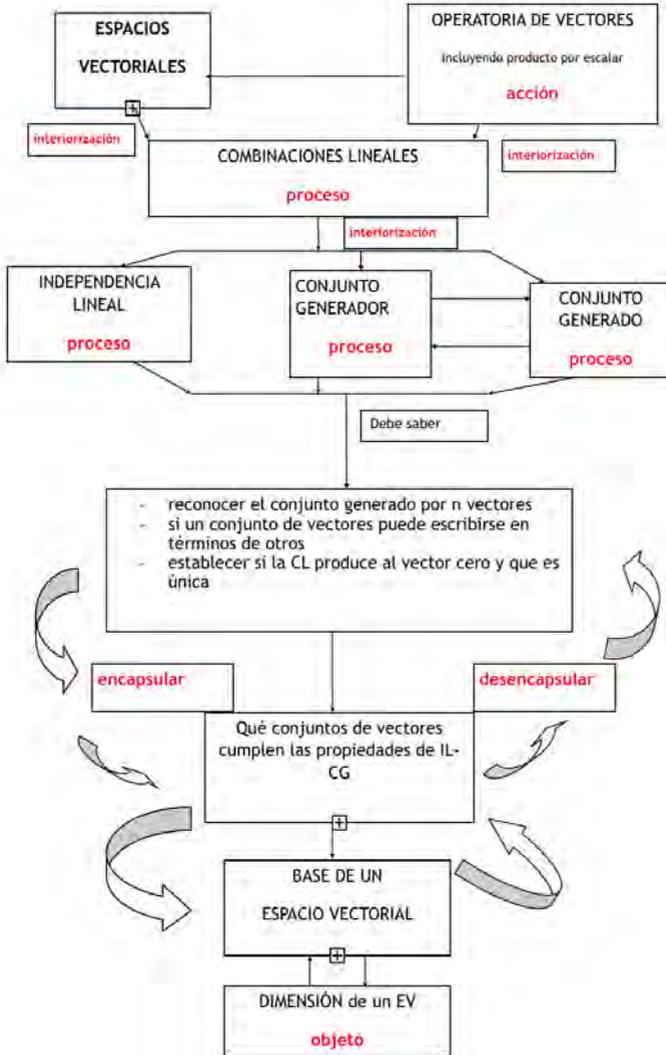
En los capítulos anteriores, se ha expresado que para esta investigación que se realiza bajo en marco teórico de APOE y tomando como referencia a la tesis de Ku, se propone lograr los siguientes objetivos:

- *Analizar los contenidos de los textos sugeridos en el nivel superior para el aprendizaje del Álgebra Lineal.*
- *Determinar la presencia de las construcciones mentales propuestas en la Descomposición Genética de la Tesis de Darly Ku.*

Estos objetivos se desprenden de la inquietud que despierta en docentes e investigadores, la situación problemática que representa la enseñanza y aprendizaje del Álgebra Lineal. En busca de mejorar la enseñanza, se in-

teresa en validar la Descomposición Genética propuesta y entender mejor cuáles son los mecanismos mentales relacionados con la construcción del concepto de Base de un Espacio Vectorial.

La primera aproximación, se realiza con la Descomposición Genética que se muestra a continuación:



La mecánica de la investigación, se organiza con una mención del contenido completo del texto, desarrollando con un poco más de detalle los temas involucrados con el concepto, mostrando algunas imágenes escaneadas del texto. El objetivo es mostrar como aparecen las nociones previas para el concepto de Base de un Espacios Vectoriales. Se analiza la forma de ejemplificarlas, las actividades propuestas para el estudiante y si se propone ejercitación con un soporte informático.

A través de los resultados de esta investigación, se quiere determinar si estos textos, ayudan al estudiante a lograr el conjunto de construcciones mentales para la comprensión del concepto de Base de un Espacio Vectorial, visto desde la propuesta realizada en la Descomposición Genética de Ku.

Análisis del texto “Álgebra Lineal. Una Introducción Moderna” de Poole, David

El texto se encuentra dividido en capítulos temáticos, en los cuales se presenta un desarrollo teórico que se introduce a través de ejemplos y ejercicios, gráficos y analíticos. Cada sección contiene una serie de aplicaciones, permitiendo alcanzar la relevancia al tema. No está diseñado con situaciones que impliquen la utilización de un soporte computacional.

Se observa que desde los primeros capítulos, se presenta la idea intuitiva de los conceptos que involucra la construcción de la noción de una base. Se analiza con detalle desde la Teoría APOE cómo se presenta las diferentes actividades teniendo en cuenta la Descomposición Genética de Ku. El autor utiliza actividades variadas para vectores en \mathbb{R}^2 , \mathbb{R}^3 y \mathbb{R}^n para graficar y operar analíticamente, presentando situaciones novedosas que requieren de un importante grado de abstracción.

El uso de conceptos desde los primeros capítulos, permite que el estudiante incorpore e interprete ese lenguaje y que pueda aplicarlo con más naturalidad en nociones posteriores que se presentan con un grado de abstracción mucho mayor. A través de algunos escaneos de las alguna páginas del libro, se mostrará ciertas situaciones que permiten observar lo expuesto. Tal es el caso de la aparición del concepto de combinación lineal desde el primer capítulo, a diferencia de otros textos en los que se trata del tema más adelante, acorde, quizás, a los programas tradicionales del Álgebra. Se muestra en las siguientes figuras, la presentación del concepto:

Combinaciones lineales y coordenadas

Un vector, que es una suma de múltiplos escalares de otros vectores, se define como una *combinación lineal* de estos vectores. A continuación, se presenta la definición formal.

Definición Un vector \mathbf{v} es una **combinación lineal** de vectores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k$ si existen escalares c_1, c_2, \dots, c_k tales que $\mathbf{v} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \dots + c_k\mathbf{v}_k$. Los escalares c_1, c_2, \dots, c_k son llamados los **coeficientes** de la combinación lineal.

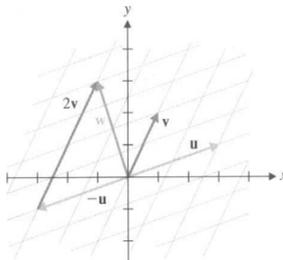
EJEMPLO 6 El vector $\begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}$ es una combinación lineal de $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} 5 \\ -4 \\ 0 \end{bmatrix}$, puesto que

$$3 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 \\ -4 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \blacklozenge$$

Observación: Determinar si un vector dado es una combinación lineal de otros vectores es un problema que abordaremos en el capítulo 2.

En \mathbb{R}^2 , es posible representar combinaciones lineales de dos vectores (no paralelos) de manera bastante conveniente.

EJEMPLO 7 Sea $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$. Podemos emplear \mathbf{u} y \mathbf{v} para localizar un nuevo conjunto de ejes (de la misma manera que $\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ localizan los ejes coordenados



En el capítulo II, junto con Sistemas de Ecuaciones, aparece la noción de espacio generado: al haber resuelto sistemas de ecuaciones lineales, se está en condiciones de determinar si un vector es combinación lineal de otros y a través de ejemplos, presenta al conjunto generado como el conjunto de todas las combinaciones lineales de un conjunto finito de vectores para luego, en otros ejemplos, utilizar esta noción.

Conjuntos generadores de vectores

Ahora podemos fácilmente responder la pregunta suscitada en la sección 1.1: ¿cuándo un vector dado es una combinación lineal de otros vectores dados?

- EJEMPLO 1** (a) ¿El vector $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ es una combinación lineal de los vectores $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}$?
- (b) ¿Es $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$ una combinación lineal de los vectores $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}$?

SOLUCIÓN:

(a) Queremos hallar escalares x y y tales que

$$x \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Expandiendo, obtenemos el sistema

$$\begin{aligned} x - y &= 1 \\ y &= 2 \\ 3x - 3y &= 3 \end{aligned}$$

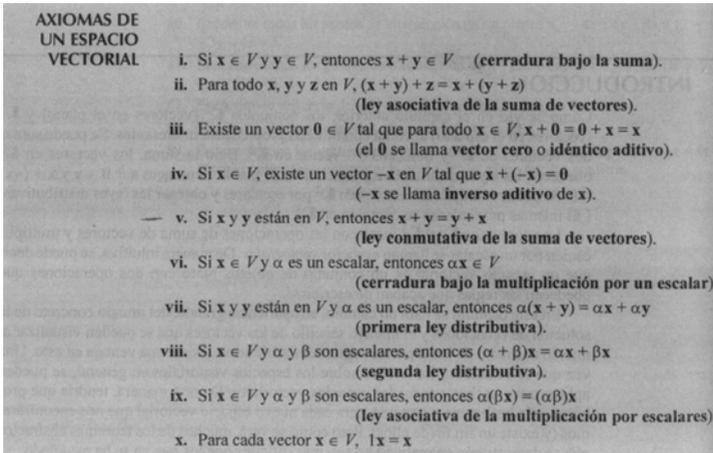
Se puede concluir que, en éste texto, en el desarrollo de los ejemplos gráficos, analíticos y de la presentación teórica con un lenguaje que aparece paulatinamente, se encuentran presentes las construcciones mentales propuestas en la Descomposición Genética para el aprendizaje del concepto de Base y permite la apropiación de las nociones en forma lenta a lo largo del desarrollo de la asignatura.

Análisis del texto “Álgebra Lineal” de Grossman, Stanley

En el comienzo del texto, el autor expresa que una de las metas que quiere cumplir a través del libro, es que los conceptos del Álgebra Lineal se vuelvan accesibles a los estudiantes que requieran sólo de conocimientos firmes y que tengan un primer curso de Cálculo, pero determina si está dirigido para ser usado en algunas carreras.

El texto se estructura en capítulos temáticos, en los cuales se presenta un desarrollo teórico que son introducidos por medio de ejemplos numéricos y geométricos. Cada sección contiene una serie de aplicaciones, permitiendo dar relevancia al tema. Además, propone en cada capítulo, actividades para desarrollar con el MATLAB, de la empresa Math Works, Inc.

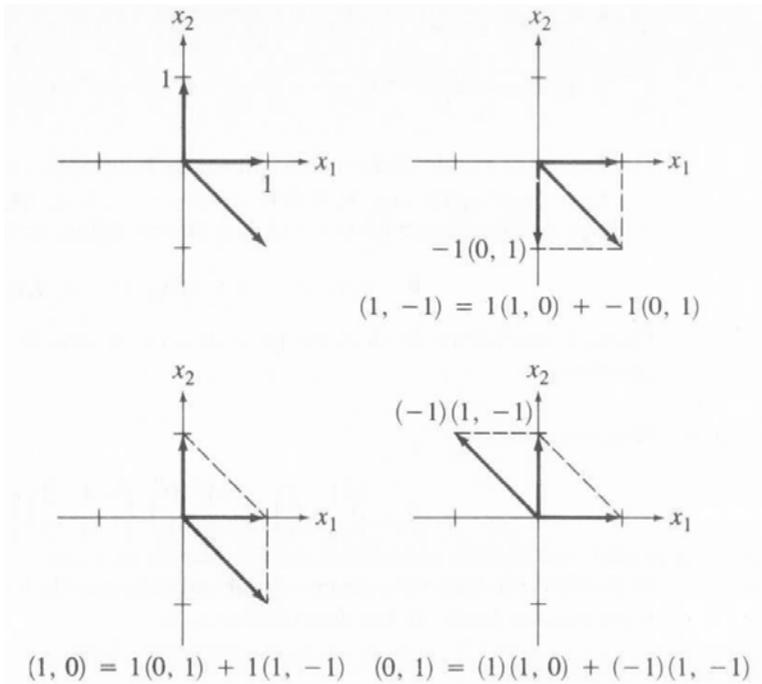
Si bien el uso del soft facilita la incorporación de los conceptos, mediante la posibilidad de cambiar valores para apreciar el comportamiento de los objetos, se observa que varias de las nociones se presentan en forma teórica, sin la presentación previa por medio de ejemplos, haciendo, quizás, más dura la aprehensión del concepto, por parte del alumno. Se muestra un caso, donde no hay ni ejercicio ni ejemplo anterior, sólo se hace referencia al capítulo donde se trató las operaciones entre matrices:



Se observa que las nociones involucradas al tema de investigación, no se desarrollan desde los primeros capítulos, se presenta cada concepto que involucra la construcción de la noción de una base, desde su definición. Se analiza con detalle desde la Teoría APOE cómo se presenta las diferentes actividades teniendo en cuenta la Descomposición Genética de Ku.

Análisis del texto “Álgebra Lineal con Aplicaciones” de Perry, William L.

Es un texto que presenta variadas aplicaciones, en general, dirigidas a la ingeniería, proponiéndose poseer un conocimiento básico previo de derivadas e integrales, ya que varias aplicaciones están dirigidas al Cálculo. Por la importancia de los números Complejos, se analizan ejemplos que los involucren y el texto presenta un apéndice destinado a aquellos estudiantes que lo requieran. . No está diseñado con situaciones que impliquen la utilización de un soporte computacional particular; sin embargo, se proponen ejemplos que requieren, por los cálculos, de alguna ayuda computacional; la ejercitación es variada y permite la introducción en los temas en forma paulatina. Mediante la representación gráfica, se muestran ejemplos, como se ve en la siguiente figura:



Este texto no presenta las nociones que permiten construir el concepto de base de un espacio vectorial en forma paulatina, es decir, desde los primeros capítulos, sino que se definen al tratar el capítulo III de espacios vectoriales y los conceptos que dan lugar al concepto de base.

Se puede concluir que el texto, en el desarrollo de los contenidos y actividades, se encuentra un lenguaje apropiado que permite las construcciones mentales en las concepciones propuestas en la Descomposición Genética para el aprendizaje del concepto de Base.

Conclusiones obtenidas hasta el momento sobre los textos considerados

En primer lugar, cabe señalar que los tres textos analizados, presentan características diferentes entre sí. Esta particularidad se hace notoria, principalmente con el texto de Poole, ya que presenta los temas en un orden novedoso respecto de los otros.

Se considera que el texto de Poole presenta ejemplos claros para que esté al alcance del estudiante la respuesta. Además, es posible que se vincule el hecho que la base construye a un Espacio Vectorial por haber sido presentado a lo largo de los capítulos en su desarrollo analítico y en la ejemplificación utilizada.

Sin embargo, el texto de Grossman, por tener una presentación menos intuitiva y elaborada desde el inicio, posiblemente el estudiante que se prepara por éste texto, tenga dificultades para responder a la entrevista, pues la ejemplificación no permite que el estudiante abstraiga el concepto al recurrir a casos, generalmente, en \mathbb{R}^n .

En el texto de Perry, las actividades que se proponen son más sencillas que las de la entrevista. Sin embargo, la propuesta es rica y variada en los casos de aplicaciones que presenta y en los ejemplos de introducción inmediata que se enseña, se considera que puede permitir a un estudiante, hallarse en situación de enfrentar a la entrevista y de responderla correctamente, casi en su totalidad. Posiblemente, le genere inconvenientes las preguntas donde se requiere una interpretación geométrica ya que en el texto, si bien se contempla, no se hace mucho hincapié en ello.

La Teoría APOE permite ayudar a los estudiantes a construir las estructuras apropiadas para cada concepto y relacionarlas con estructuras previas (lo cual es observado en las entrevistas realizadas). El estudiante

no aprende conceptos matemáticos en forma directa, sino que necesita recurrir a estructuras mentales que sean apropiadas para aprender un concepto y si no las ha logrado, es difícil que aprenda dicho concepto.

La Teoría APOE permite indagar sobre la forma en que se aprende y a través de futuros trabajos de investigación, develar los caminos apropiados para mejorar el aprendizaje de la Matemática, por esto se considera importante el análisis del lenguaje simbólico y natural que se utiliza en los textos para el desarrollo de las distintas asignaturas, dejando expectante una continua investigación.

Bibliografía

- KU, Darly (2007). *Aprendizaje de la base de un Espacio Vectorial desde el punto de vista de la teoría APOE*. Tesis de maestra en ciencias en la especialidad de matemática educativa. Mx.
- ASIALA, M., BROWN, A., DEVRIES, D.J., DUBINSKY, E., MATHEWS, D., THOMAS, K. (1996) *A framework for research and curriculum development in undergraduate mathematics education*. In J. Kaput, A.H. Schoenfeld, E.
- DUBINSKY (Ed.s) *Research in collegiate mathematics education*. Vol. 2. Providence, RI: American Mathematical Society. p. 1-32.
- CHARGOY, R. M. (2006) *Dificultades asociadas al concepto de base de un espacio vectorial*. Tesis doctoral, Cinvestav-IPN.
- Dubinsky, E. (1996). Aplicación de la perspectiva piagetiana a la educación matemática universitaria. *Educación Matemática*. Vol. 8.
- DUBINSKY, E. (1997) Some Thoughts on a First Course in Linear Algebra at The College Level. En D. Carlson, C.R. Johnson, D.C. Lay, R.D.Porter, A. atkins (eds). *Resources for Teaching Linear Algebra*, MAA Notes, 42, 85- 105.
- TRIGUEROS, María (2005). *La noción de esquema en la investigación en matemática educativa a nivel superior*. Educación Matemática, abril, año/vol. 17, número 001, Santillana, Distrito Federal, México, pp. 5-31.

- TRIGUEROS, M. y Oktaç, A. (2005). La Théorie APOS et l'Enseignement de l'Algèbre Linéaire. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, vol. 10, 157-176.
- VARGAS VÁSQUEZ, Xaab Nop, Asuman Oktaç, María Trigueros (2002). *El estudio de los espacios vectoriales desde el punto de vista de la teoría APOE*, Cinvestav IPN, México, ITAM.
- MONTOYA, Eduardo Miranda (2006). El marco de construcciones mentales APOE y el concepto de función. *Revista Educar* N° 3, octubre-diciembre 2007, México.
- CERUTTI, Rubén A. - ANDREOLI, Daniela I. (2002) *Construcción de los conceptos de dependencia e independencia lineal e vectores en alumnos de primer año de la Universidad (Primera Fase)*. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales y Agrimensura - UNNE.- Argentina.
- NARDI, E. (1997), El encuentro del matemático principiante con la abstracción matemática: Una imagen conceptual de los conjuntos generadores en el análisis vectorial. *Educación Matemática*. Vol. 9.
- PARRAGUÉZ, Marcela en C.(2007). *Un estudio sobre la noción de espacio vectorial y su evolución en base a nuevos conceptos que se relacionan con él*.
- MANZANERO VÁSQUEZ, Ligia; OKTAÇ, Asuman; TRIGUEROS, María (2006) *El estudio de sistemas de ecuaciones desde el punto de vista de la teoría APOE*, Cinvestav IPN- ITAM, México.

Textos consultados

- POOLE, David, Álgebra Lineal. *Una Introducción Moderna*, Internacional Thomson Editores, 2004, Mx, (Traducción del libro Linear Algebra. Modern Introduction, Brooks/Cole-Thomson Learning, 2003).
- GROSSMAN, Stanley, *Álgebra Lineal*, Ed. Mc Graw Hill, 1996, (Traducción de la 5ª edición del libro Elementary Linear Algebra. With Applications, Saunders Collage Publishing, 1995).

PERRY, William L, *Algebra Lineal con Aplicaciones*, Ed. Mc Graw Hill, 1990, Mx. (Traducción de la 1ª edición del libro Elementary Linear Algebra, 1989).